KONSTR. GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
Lista zadań nr 6.

1. Pokazać, że $Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ jest normalnym rozszerzeniem Q. Znaleźć grupę Galois i jej podgrupy. Znaleźć wszystkie podciała ciała K (są to $Q, K, Q(\sqrt{2}), Q(\sqrt{3})$, i jeszcze jedno, które trzeba znaleźć).
2. Znaleźć ciało rozkładu K wielomianu $X^4 - 2 \in Q[X]$. Pokazać, że stopień K nad Q to 8. Obliczyć grupę Galois ciała K (sprawdzić na co mogą przejść przy automorfizmach elementy $\sqrt[4]{2}, i$, a potem uzyskać nieprzemienność grupy Galois, przypomnieć sobie jakie z dokładnością do izomorfizmu są grupy rzędu 8 i obliczyć ilość elementów rzędu 2). Znaleźć wszystkie podciała M ciała K i wskazać te, które są normalne nad Q. Sporządzić odpowiedni diagram.
3. Pokazać, że poniższe ciała są równe: $Q(\sqrt[3]{4} - 1, \sqrt{2})$, $Q(\sqrt[3]{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$, $Q(\sqrt[6]{2})$.
4. Niech $K = Q(\sqrt[3]{2})$. Znaleźć najmniejsze w sensie zawierania normalne nad Q rozszerzenie L ciała K.
5. Każda podgrupa indeksu 2 jest dzielnikiem normalnym.
6. Niech $x \in G$ będzie elementem rzędu 2. Pokazać, że $\{e, x\}$ jest dzielnikiem normalnym wtedy i tylko wtedy gdy x komutuje ze wszystkimi elementami grupy G.
7. Niech $\alpha \in C$ będzie liczbą algebraiczną, zaś $f(X) \in Q[X]$ jej wielomianem minimalnym. Pokazać, że α jest jednokrotnym pierwiastkiem f. Wsk. Rozważyć pochodną.
8. Znaleźć $\alpha \in C$, że $X^3 - 3X - \alpha$ ma krotne pierwiastki.
9. Naszkicować ideę znalezienia wszystkich podciał ciała $Q(\sqrt[4]{5})$.
10. Czy $Q(\sqrt[3]{3}, \sqrt{-3})$ jest normalnym rozszerzeniem Q?

20 maja 2019 Tadeusz Pezda