ANALIZA III - LISTA 1

1. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanych ograniczeniach i okreslić czy jest to minimum, maksimum, ewentualnie lokalne minimum, lokalne maksimum.

(a) $f(x,y,z) = x - y + z$, przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
(b) $f(x,y) = x - y$, przy warunku $x^2 - y^2 = 2$
(c) $f(x,y) = x^{10} + y^{10}$, przy warunku $x + y = 2$
(d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, przy warunku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
(e) $f(x,y,z) = x + y + z$, przy warunku $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$
(f) $f(x_1, ..., x_n) = x_1^p + ... + x_n^p$, przy warunku $x_1 + ... + x_n = a > 0, x_i \geq 0$
(g) $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, przy warunku $x^2 + y^2 = 1$
(h) $f(x,y) = x + y$, przy warunku $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

2. Na elipsie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ znaleźć punkty najbliższy i najdalszy od prostej $3x + y - 9 = 0$

3. Znaleźć największą i najmniejszą wartość podanych funkcji w kole jednostkowym, tzn. w zbiorze $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$:
$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$,
$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$,
$f(x,y) = xy - y^2$.

4. Pudełko w kształcie prostopadłościanu otwarte od góry ma powierzchnię $16m^2$. Znaleźć wymiary, przy których objętość jest największa.

5. Poczta w USA wymaga, aby wymiary paczki były takie, że suma długości, podwojonej szerokości i podwojonej wysokości nie przekraczała 108 cali. Jaka jest objętość największej objętościowo paczki jaką poczta może dostarczyc?

6. Namiot bez podłogi, ma kształt cylindra ze stożkowym daszkiem. Jakie muszą być wymiary namiotu o ustalonej objętości V, aby uzyć jak najmniej materiału na jego budowę.

7. Znajdź punkt w $\mathbb{R}^3$ o sumie współrzędnych 48, którego odległość od początku układu współrzędnych jest najmniejsza.

8. Niech n będzie liczbą całkowitą. Znajdź n liczb, których suma wynosi 8n, a suma kwadratów jest tak mała jak to mozliwe.

9. Znaleźć trzy liczby dodatnie o sumie 48 i największym możliwym iloczynie.

10. Znaleźć trzy dodatnie liczby dodatnie o iloczynie 48 i najmniejszej możliwej sumie.

11. W trapezie równoramiennym suma mniejszej podstawy i dwóch ramion wynosi $3r$. Pokaż, że trapez o największym polu ma podstawę równą r raz kąt pomiedzy podstawą i ramieniem wynosi $2\pi/3$.

12. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji przy podanych ograniczeniach

(a) $f(x,y,z) = x+y+z$, przy warunkach $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$
(b) $f(x,y,z,w) = xw + yz$, przy warunkach $x^2 + y^2 = 1$, $w^2 + z^2 = 1$

13. Znajdź minimum funkcji $f(x,y,z) = xyz$ przy warunkach $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x - 2y = 0$.

14. Niech P będzie punktem powierzchni S w $\mathbb{R}^3$ okreslonej równaniem $f(x,y,z) = 1$, gdzie f jest klasy C^1 i ∇f jest niezerowy na S. Załóżmy, że P jest punktem, w którym odległość od początku układu jest największa. Pokazać, że wektor łączący początek układu z punktem P jest prostopadły do S.

15. Udowodnij nierówność Höldera

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^q \right)^{1/q},$$

gdzie $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_i, x_i \geq 0$. *Wskazówka: Znajdź minimum prawej strony nierówności przy warunku* $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$. *Można zacząć od* $n = 2$.

16. Udowodnij nierówność między średnią geometryczną, a arytmetyczną:

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

gdzie $x_i \geq 0$. *Wskazówka: Znajdź maksimum funkcji* $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ *przy warunku* $\sum_{i=1}^n x_i = A$. *Można zacząć od* $n = 2$.

17. Znajdź wartości ekstremalne funkcji

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n}, \quad x_1, \dots, x_n > 0.$$

Starannie uzasadnij swój wynik, bo zbiór jest otwarty i nieograniczony. *Wskazówka: Można zacząć od* $n = 2, 3$.

17. Znajdź wartości ekstremalne funkcji $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$, przy warunku $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, gdzie macierz $[a_{i,j}]$ nie musi być symetryczna.