ANALIZA III - LISTA 8

Zadania bez gwiazdek obowiązują na trzecie kolokwium. Zadania z gwiazdkami nie są bardzo trudne, a zostały oznakowane by zaznaczyć ich nieobowiązkowość.

1. Niech

$$\psi_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon^2} \exp\big(\frac{\varepsilon^2}{x^2-\varepsilon^2}\big), \text{ gdy } |x| < \varepsilon \tag{0.1}$$

i $\psi_\varepsilon = 0$ poza tym. c jest dobrane tak by $\int_{\mathbb{R}} \psi_1(x)\, dx = 1$. Pokazać, że ψ_1 można zróżniczkować w każdym punkcie i otrzymana pochodna jest ciągła. Jak jest norma supremum pochodnej?

2. Pokazać, że ψ_ε można zróżniczkować dwa razy w każdym punkcie i otrzymana pochodna jest ciągła. Jaka jest norma supremum pochodnej?

3*. Spróbować uogólnić zadanie 2 na m pochodnych.

4. Pokazać że następujące funkcje zdefiniowane na R^d mają ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

(a) $\tilde{\psi}_\varepsilon(x_1, x_2, ..., x_d) = \psi_\varepsilon(x_1) \cdot \dots \cdot \psi_\varepsilon(x_d)$

(b) $\varphi_\varepsilon = \begin{cases} \frac{c}{\varepsilon^{2d}} \exp\big(\frac{\varepsilon^2}{x_1^2+...+x_d^2-\varepsilon^2}\big), \text{ gdy } \|x\| < \varepsilon \\ 0, \text{ gdy } \|x\| \geq \varepsilon \end{cases}$

5. Niech $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$ tzn. ϕ ma ciągłą pochodną i ϕ ma nośnik zwarty. Załóżmy, że f jest ograniczona, ma nośnik zawarty w jakimś odcinkui zbiór punktów nieciągłości f ma miarę zero. Pokazać, że

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y) f(y)\, dy \tag{0.2}$$

ma ciągłą pochodną oraz, że

$$\frac{d}{dx}(\phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \big(\frac{d}{dx}\phi\big)(x-y) f(y)\, dy \tag{0.3}$$

Wsk. Napisać z definicji iloraz różnicowy. Można sobie założyć, że f jest ciągła, co nie zmienia dowodu, ale może być sympatyczniejsze.

6. Niech $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$ tzn. ϕ ma ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe i ϕ ma nośnik zwarty. Załóżmy, że f jest ograniczona, ma nośnik zawarty w jakimś prostokącie i zbiór punktów nieciągłości f ma miarę zero. Pokazać, że

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x-y) f(y)\, dy \tag{0.4}$$

ma ciągłe pochodne oraz, że

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \big(\frac{\partial}{\partial x_1}\phi\big)(x-y)f(y)\ dy \tag{0.5}$$

Wsk. Napisać z definicji iloraz różnicowy. Można sobie założyć, że f jest ciągła, co nie zmienia dowodu, ale może być sympatyczniejsze.

7*. Niech $\phi \in C_c^m(\mathbb{R}^2)$ tzn. ϕ ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu m i ϕ ma nośnik zwarty. Załóżmy, że f jest ograniczona, ma nośnik zawarty w jakimś prostokącie i zbiór punktów nieciągłości f ma miarę zero. Pokazać, że

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x-y)f(y)\ dy \tag{0.6}$$

ϕ ma ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu m.

Można sobie założyć, że f jest ciągła, co nie zmienia dowodu, ale może być sympatyczniejsze.

8*. Przy założeniach poprzedniego zadania, pokazać, że

$$D^\alpha(\phi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \big(D^\alpha\phi\big)(x-y)f(y)\ dy \tag{0.7}$$

dla każdego wielowskaźnika do rzędu m.

Można sobie założyć, że f jest ciągła, co nie zmienia dowodu, ale może być sympatyczniejsze.

9*. Załóżmy, że f jest ciągła na $\mathbb{R}$ i ma nośnik zwarty (można założyć, że przedział jesli łatwiej myśleć) . Pokazać, że

$$\psi_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x-y)f(y)\ dy \tag{0.8}$$

zbiega jednostajnie do $f(x)$. Wsk. Zauważyć, że $\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x)\ dx = 1$. Trzeba oszacować $f(x) - \psi_\varepsilon * f(x)$ dla bardzo małych x i dla pozostałych. Mozna najpierw pokazać zbieżność punktową. Zastanowić się, co się dzieje z ψ_ε, gdy $\varepsilon \to 0$.

10.* Zrobić zadania 4,5,6 dla f całkowalnego w sensie Lebsgue'a używając twierdzenia Lebsgue'a o zbieżności ograniczonej, jak już się go nauczycie. Schemat dowodu jest identyczny jak dla f całkowalnej w sensie Riemanna.