ANALIZA III - LISTA 9

1. Rozważmy powierzchnię (helikoidę) okresloną przez $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$, $0 \leq r \leq 1$ i $0 \leq \theta \leq 4\pi$. Znaleźć wzór na wektor normalny. Pokazać, że dla punktu (x_0, y_0, z_0) leżącego na powierzchni, odcinek poziomy długości 1 od osi z przez punkt (x_0, y_0, z_0) leży na powierzchni i na plaszczyźnie stycznej.

2. Obliczyc pole powierzchni helikoidy z zadania 1.

3. Obliczyc pole powierchni torusa $x = (R + r\cos\varphi)\cos\psi$, $y = (R + r\cos\varphi)\sin\psi$, $z = r\sin\varphi$, gdzie $\varphi, \psi \in [0, 2\pi]$. Co by sie stało, gdyby dopuścić $\varphi, \psi \in [0, 4\pi]$.

4. Niech $\Phi(u,v) = (u - v, u + v, u)$ i D bedzie kołem jednostkowym w płaszczyźnie uv. Obliczyc pole powierzchi $\Phi(D)$.

5. Obliczyc pole powierzchi fragmentu sfery jednostkowej wyciętego przez stożek $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$.

6. Znaleźć parametryzację powierzchni $x^2 - y^2 = 1$, gdzie $x > 0$, $-1 \leq y \leq 1$ i $0 \leq z \leq 1$. Wyrazić pole powierzcni za pomoca całki.

7. Znaleźć pole powierzchni wykresu funkcji $f(x,y) = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right)$, leżącego ponad kwadratem $[0,1] \times [0,1]$.

8. Obliczyć pole powierzchni określonej przez $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

9. Obliczyć $\int_S xy\, dS$, gdzie S jest powierzchnią czworościanu o ścianach $z = 0, y = 0, x + z = 1$ i $x = y$.

10. Obliczyć $\int_S z\, dS$, gdzie S jest górna półsferą o promienu a.

11. Obliczyć $\int_S xyz\, dS$, gdzie S jest trójkatem o wierchołkach $(1,0,0), (0,2,0), (0,1,1)$.

12. Obliczyć $\int_S z\, dS$, gdzie S jest powierzchnią $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

13. Obliczyć $\int_S z^2\, dS$, gdzie S jest brzegiem sześcianu $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.

14. Obliczyć masę sfery o promieniu R, gdzie gęstość masy w punkcie (x,y,z) jest równa odległości tego punktu od ustalonego punktu (x_0, y_0, z_0) tej sfery. Wsk. Masa, to całką powierzchniową z gęstości.

15. Metalowa powłoka S ma kształt górnej półsfery o promieniu R. Gęstość masy w (x,y,z) wynosi $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2$. Znaleźć całkowitą masę S.

16. Znaleźć środek masy części sfery o promieniu R leżącej w pierwszym oktancie, przy założeniu, że masa jest proporcjonalna do powierzchni. Wsk. środek masy w tym przypadku to punkt $(\int_S x\, dS, \int_S y\, dS, \int_S z\, dS)$.

17. Załóżmy, że temperatura w punkcie powierzchni jest dana wzorem $T(x,y,z) = 3x^2+3z^2$. Obliczyć przepływ ciepła przez powierzchnię $x^2+z^2=2$, $0 \leq y \leq 2$, przy $k=1$. Wsk. Przepływ ciepła to $\int_S (-k\nabla T) \circ dS$.

18. Obliczyć przepływ ciepła przez sferę jednostkową, jeśli $T(x,y,z) = x$. Podać interpretację fizyczna wyniku.

19. Niech S będzie powierzchnią zamkniętą złożoną z górnej półsfery jednostkowej i jej podstawy $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$. Niech $E(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ będzie polem elektrycznym w R^3. Obliczyć strumień elektryczny przez S. Wsk. można liczyć strumień lelektryczny $\int_S E \circ dS$ niezależnie po górnej półsfery jednostkowej i po jej podstawie.

20. Obliczyć $\int_S F \circ dS$, gdzie S jest powierzchnią półkuli $x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0$ i $F = (x+3y^5, y+10xz, z-xy)$.

21. Znaleźć przepływ pola $F(x,y,z) = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ na zewnątrze sfery jednostkowej.

22. Obliczyć całkę $\int_S (F \circ n) dS$, gdzie S jest powierzchnią cylindra $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, a $F = (1, 1, z(x^2+y^2)^2)$.

23. Silna jednostajna ulewa powoduje przepływ wody zgodnie z polem wektorowym $F(x,y,z) = (0,0,-1)$. Znaleźć całkowity przepływ przez powierzchnię stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leq 1$. Wsk. przepływ to $\int_S F \circ dS$.

24. Mocny wiatr powoduje, że deszcz z zadania 23 zaczyna padać pod kątem 45° i jest opisany polem wektorowym $F(x,y,z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. Jaki jest teraz przepływ wody przez powierzchnię stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leq 1$.