Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Komisja Egzaminów Dyplomowych

Zakres egzaminu magisterskiego dla specjalności

Matematyka aktuarialno-finansowa

(obowiązuje studentów studiujących wg programu z 1 X 2019 bądź późniejszego)

1 Matematyka finansowa

Wymagane pojęcia, fakty: Oprocentowanie (proste, złożone, ciągłe, struktura stóp procentowych); wartość obecna i przyszła przepływów pieniężnych; renty pewne (z góry, z dołu, terminowe i nieskończone, stałe, rosnące i malejące); obligacje: oprocentowanie, kupony, rentowność, cena czysta/brudna, duracja; kontrakty forward/futures: payoff, cena bezarbitrażowa, krótka sprzedaż; opcje europejskie, amerykańskie, egzotyczne (terminologia, własności, payoff, parytet put-call, ograniczenia górne i dolne ceny); strategie opcyjne; model dwumianowy, wycena risk-neutral, portfel replikujący, delta, path-dependence; dywidendy i ich wpływ na wycenę opcji oraz kontraktów terminowych; swapy: Interest Rate Swap (IRS), swap walutowy (currency), stopa fixed i floating; model Blacka- Scholesa (kalibracja, wskaźniki greckie, wycena, hedging dynamiczny i statyczny, formuła Blacka-Scholesa i podejścia numeryczne); rozwinięcia modelu Blacka-Scholesa (w tym wielowymiarowość, dywidendy, dodatkowe opłaty, psucie się aktywów, niepewność parametrów).

Wymagane umiejętności: Wyznaczanie wartości obecnych i przyszłych dla przepływów pieniężnych oraz rent pewnych (skończonych i nieskończonych) w różnych modelach oprocentowania; wyznaczanie ceny teoretycznej obligacji i jej rentowności oraz duracji; wyliczanie bezarbitrażowej ceny kontraktów forward/futures, w tym dla kontraktów na akcje wypłacające dywidendy oraz na waluty; wyznaczanie wartości portfeli opcyjnych oraz ich górnych/dolnych ograniczeń na podstawie własności model-independent (np. parytet put-call); rysowanie wykresów payoffu portfeli składających się z akcji, obligacji, kontraktów forward lub opcji; wycena i zabezpieczanie opcji w modelu dwumianowym (europejskich, amerykańskich, path-dependent); wyznaczanie korzyści ze swapa IRS dla dwóch stron; wyznaczanie ceny swapa walutowego typu fixed-for-fixed; model Blacka-Scholesa: wyprowadzenie równania różniczkowego na wartość instrumentu w modelu klasycznym i jego rozwinięciach; rozumienie wzorów i zależności pomiędzy podstawowymi wzorami wyceny i hedgingu instrumentów; rozumienie metody finite difference.

Przykładowe zadania

1. Cena forward zakupu pewnej akcji niewypłacającej dywidend za 5 lat wynosi 56 zł. Cena europejskiej opcji put na tą samą akcję, z ceną wykonania 40 zł i zapadalnością również 5 lat to 16 zł.

- Wyznacz cenę europejskiej opcji call na tą samą akcję na bezarbitrażowym rynku, która ma tą samą cenę wykonania 40 zł oraz zapadalność 5 lat. Załóż model oprocentowania ciągłego z nominalną roczną stopą procentową 4%.
- Narysuj payoff portfela składającego się w sumie z dwóch takich opcji put oraz jednej takiej opcji call. Wskaż, ile wyniesie ten payoff dla ceny akcji równej 0 zł, 40 zł oraz 80 zł.

2. Spółkom A i B bank zaproponował następujące roczne stopy oprocentowania kredytu w wysokości 1 mln zł:

- spółce A: oprocentowanie stałe w wysokości 1,8% lub oprocentowanie zmienne w wysokości WIBOR + 0,4%,
- spółce B: oprocentowanie stałe w wysokości 1,4% lub oprocentowanie zmienne w wysokości WIBOR + 0,6%.

Spółka A woli płacić odsetki według oprocentowania stałego, a spółka B według zmiennego. Żeby uzyskać jak najkorzystniejsze warunki, w banku zdecydowały się jednak na odwrotne wybory, po czym za pośrednictwem instytucji finansowej zawarły kontrakt SWAP, dzięki któremu płacą taki rodzaj odsetek, jaki pierwotnie chciały. Wyznacz, ile wynosi stała stopa procentowa płacona rocznie przez spółkę A, jeśli pośrednicząca instytucja finansowa zabiera prowizję w wysokości 0,2%, a spółki A i B podzieliły się korzyścią z zawarcia kontraktu SWAP po równo.

3. Korzystając z parytetu call-put wyprowadź zależność między wskaźnikami greckimi delta dla opcji call i put binarnych. Narysuj ich zależność od ceny aktywa podstawowego i opisz, jak będzie się ona zmieniała w czasie.

4.Rozwijając model Blacka-Scholesa, wyprowadź równanie na cenę i deltę opcji europejskiej call na 1 USD zakładając stałe, ciągłe oprocentowanie r dla PLN oraz r_f dla USD.

5. 1 stycznia 2009 inwestor X zawarł krótką pozycję w rocznym kontrakcie forward na aktywo, którego dzisiejsza wartość to 140, z inwestorem Y. 30 czerwca 2009, gdy cena aktywa jest równa 120, inwestor Y chce się wycofać z kontraktu. Tego dnia Y znalazł sobie zamiennika Z, który godzi się wypełnić wszystkie obowiązki nałożone na Y w wyżej opisanym kontrakcie. Jaki powinien być tego dnia przepływ pieniądza od Y do Z, zakładając że Y nie chce być związany żadnymi zobowiązaniami z X i Z? Odpowiedź podaj z dokładnością do 5 groszy, przy czym wartość ujemna oznacza, że Y otrzyma zapłatę od Z. Załóż, że każdy miesiąc ma taką samą liczbę dni w ciągu roku, a do obliczeń przyjmij roczną stopę ciągła wolną od ryzyka na poziomie 5%.

2 Analiza stochastyczna i wstęp do procesów stochastycznych

Wymagane pojęcia, fakty:

- łańcuch i proces Markowa, równania Chapmana-Kołmogorowa, prospektywne, retrospektywne równania różniczkowe Kołmogorowa, rozkład stacjonarny łańcucha Markowa, własność Markowa,
- proces Wienera, zasada odbicia, moment zatrzymania,
- proces Poissona, złożony proces Poissona,
- martyngały, twierdzenie Dooba o opcjonalnym zatrzymaniu, twierdzenie Walda,
- procesy gaussowskie, ułamkowy ruch Browna, procesy samopodobne,
- procesy Lévy'ego, wykładnik Lévy'ego,
- całka Ito i formuła Ito.

Wymagane umiejętności:

- wyliczanie rozkładu stacjonarnego dla łańcucha Markowa, układanie i rozwiązywanie równań prospektywnego/retrospektywnego Kołmogorowa dla procesu Markowa,
- sprawdzanie własności martyngałowych zadanego procesu stochastycznego,
- korzystanie z własności i różnych reprezentacji procesu Wienera i procesów Markowa,
- obliczenie wykładnika Lévy'ego dla procesów Lévy'ego,
- obliczanie podstawowych całek stochastycznych,
- korzystanie z formuły Ito.

Przykładowe zadania

1. Niech $\{B_1(t); t \geqslant 0\}, \{B_2(t); t \geqslant 0\}$ będą niezależnymi standardowymi ruchami Browna określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.
a) Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a takie, że $B(t) = aB_1(t) + B_2(at)$ jest standardowym ruchem Browna.
b) Obliczyć $P(B_1(2004) > 2004B_2(1))$.

2. Niech $\{N(t); t \geqslant 0\}$ będzie procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$. Wykazać, że

$$E\exp(i\theta N(t)) = \exp(t\Psi(\theta))$$

oraz podać postać funkcji Ψ.

3. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste a, b takie, że $(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7})'$ jest rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa o macierzy prawdopodobieństw przejść

$$\begin{pmatrix} a+b & b & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3 Matematyka ubezpieczeniowa

Wymagane pojęcia, fakty:

obecna wartość aktuarialna, zakumulowana wartość aktuarialna, teoretyczne prawa śmiertelności, tablice trwania życia, hipoteza jednorodnej populacji, hipotezy interpolacyjne, ubezpieczenia na życie, dożycie i terminowe, renty życiowe i terminowa, składki, rezerwy, elementarna teoria ubezpieczeń dla wielu osób i ubezpieczeń na wiele ryzyk.

Podstawowe charakterystyki ryzyka X (średnia, wariancja, odchylenie standardowe, skośność, kurtoza), rozkłady ciągłe ryzyk i ich charakterystyki: normalny, logarytmicznie normalny, gamma, jednostajny, Pareto, rozkłady dyskretne ryzyk i ich charakterystyki; zmienne liczące (rozład dwumianowy, Poissona, ujemny dwumianowy), funkcja użyteczności, model indywidualny, kontrakt stop-loss. Podstawowe kontrakty ubezpieczeniowe dla ryzyk indywidualnych (wkład własny, ryzyko dla ubezpieczyciela na pojedynczą szkodę i ryzyko dla ubezpieczyciela na pojedynczą płatność, franszyza redukcyjna, współpłacenie, dopuszczalny limit), składki netto, wariancji, odchylenia standardowego, model kolektywny, rozkład sumy niezależnych szkód, rozkłady złożone (Poissona, dwumianowy, geometryczny, rekurencja Panjera, aproksymacja rozkładów złożonych rozkładem normalnym, model Cramera-Lundberga).

Wymagane umiejętności:

wyliczenie prawdopodobieństw zgonu i przeżycia na podstawie tablic trwania życia lub przy zadanym rozkładzie długości życia, wyliczenie składek i rezerw na podstawie tablic trwania życia lub przy zadanym rozkładzie długości życia; wyliczanie składki w modelach bayesowskich wyliczanie parametrów rozkładu danego ryzyka, wyliczanie składek dla zadanej funkcji użyteczności i zadanego rozkładu szkód, wyliczanie miar ryzyka dla zadanego rozkładu szkody, wyliczanie rozkładu sumy szkód, wyliczanie momentów rozkładów złożonych, wyliczanie straty w indywidualnym modelu ryzyka, wyliczanie straty w kolektywnym modelu ryzyka, wyliczanie prawdopodobieństwa ruiny.

Przykładowe zadania

1. Sześćdziesięciolatek wpłaca w dniu urodzin 1000 PLN do funduszu ubezpieczeniowego. Następnej wpłaty w wysokości 2000 PLN planuje dokonać w dniu sześćdziesiątych pierwszych urodzin. Jeśli skończy sześćdziesiąt dwa lata zostanie mu wypłacona zakumulowana wartość aktuarialna opisanej powyżej renty. Znajdź tę wartość.

Do obliczeń przyjmij, że

$$p_{60} = 0.75, \quad p_{[60]+1} = 0.4, \quad i = 0.2,$$

gdzie i jest efektywną stopą procentową.

2. Trzyletnie ubezpieczenie dla osoby w wieku x wypłaca 1000 zł jeśli śmierć nastąpi w pierwszym roku, 2000 zł jeśli śmierć nastąpi w drugim roku. Wypłaty dokonywane są na koniec roku śmierci. W przypadku dożycia do końca trwania ubezpieczenia wypłacana jest kwota 3000 zł. Wiadomo że

$$q_x = 0.2, \quad {}_{1|}q_x = 0.2, \quad {}_{2|}q_x = 0.3, \quad v = 0.9.$$

(a) Napisz obecą wartość tego ubezpieczenia.

(b) Oblicz jednorazową składkę netto.

3. Rozpatrzmy następujący produkt ubezpieczeniowy dla 20-latka - jeśli umrze on w pierwszym roku trwania umowy to wypłata wynosi 1000 PLN, jeśli żyje na koniec drugiego roku to wypłata wynosi 2000 PLN. Ubezpieczony płaci składki w wysokości x PLN na początku pierwszego roku oraz $2x$ PLN na początku drugiego roku. Znajdź x. Do obliczeń przyjmij, że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji, efektywna stopa procentowa w pierwszym roku wynosi $i_1 = 60\%$ natomiast w drugim roku wynosi $i_2 = 25\%$ ponadto $l_{20} = 1000, l_{21} = 800, l_{22} = 400$.

4. Oczekiwane dalsze trwanie życia 40-latka wynosi $e_{40} = E(K_{40}) = 28.5$ roku natomiast $e_{41} = 27.7$ roku.

- Znajdź p_{40} przy założeniu, że zachodzi hipoteza jednorodnej populacji (HJP).
- Zakładając dodatkowo że roczna efektywna stopa procentowa $i = 0.1$ oblicz jednorazową składkę netto czystego ubezpieczenia na dożycie dla 40-latka na okres jednego roku na sumę ubezpieczenia 100 PLN.

5. Sześćdziesięciolatek podpisuje umowę ubezpieczeniową w ramach, której za rok powinien wpłacić sumę x po czym od razu zacznie otrzymywać dożywotnią rentę wypłacaną ze stałą intensywnością 1000. Oblicz x zakładając, że przyszły czas życia sześćdziesięciolatka ma rozkład wykładniczym z parametrem $\frac{1}{90}$ oraz, że natężenie oprocentowania wynosi $\frac{1}{10}$.

6. Niech dla $t \geqslant 0$, $R(t) := u + 2t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, $u \geqslant 0$, gdzie (X_i) iid oraz$(N(t), t \geqslant 0)$ jest procesem Poissona z intensywnością 2. Niech $\psi(u) = P(T < \infty)$ będzie prawdopodobieństwem ruiny, gdzie $T = \inf\{t : R(t) < 0\}$. Szkody X_i mają rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $3/4$. Wylicz prawdopodobieństwo ruiny $\psi(u)$, przy kapitale początkowym $u = 1$.

7. Dwie niezależne sumaryczne szkody S_1, S_2 mają złożone rozkłady Poissona. $S_1 \sim CPoisson(2, F)$, $S_2 \sim CPoisson(2, G)$, gdzie F jest rozkładem równomiernym na $\{0, 2, 4\}$ oraz G jest rozkładem równomiernym na $\{1, 3, 5\}$. Wtedy $S_1 + S_2$ ma rozkład złożony Poissona $CPoisson(\lambda, H)$. Wylicz jego parametry λ oraz H.

8. Niezależne szkody mają rozkłady $P(X_i = k) = exp(-1)/k!$, $P(Y_i = k) = \binom{4+k}{k}(1/3)^5(2/3)^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Niech $S = X_1 + ... + X_{500} + Y_1 + ... + Y_{500}$. Składka pobierana od szkody S jest postaci $(1+\theta)ES$, dla pewnej stałej $\theta > 0$. Wylicz wartość tej stałej, aby szansa, że zebrana składka od wszystkich 1000 szkód pokryje szkodę wynosiła 0.95.

9. X_1 i X_2 to dwa niezależne ryzyka o zbiorze możliwych wartości $\{0, 1, 2, ...\}$. Znamy wartości dystrybuanty $F_1(x) = P(X_1 \leqslant x)$ oraz $F_S(x) = P(X_1 + X_2 \leqslant x)$:

x	$F_1(x)$	$F_S(x)$
0	0.6	0.12
1	0.8	0.46
2	0.9	0.58
3	1	0.83

Wylicz $P(X_2 = 2)$.

10. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X dany jest w tabeli:

x	0	1	2	5	10	20
$P(X = x)$	0.8	0.1	0.03	0.03	0.03	0.01

Wyznacz d, jeśli wiadomo, że $E[I_d(X)] = 0.37$.($I_d(Y) = (Y - d)_+$).

11. W modelu rezerwy $R_n = u + n - (W_1 + \cdots + W_n)$ wiemy, że W_i są iid o rozkładzie geometrycznym na $0, 1, 2, \ldots$ z parametrem $p = 3/4$. Policz prawdopodobieństwo ruiny w tym modelu dla $u = 0$.

12. Jeśli zmienna losowa Y wyraża wartość szkody, to zmienna $I_d(Y) = (Y - d)_+$ wyraża nadwyżkę szkody ponad d. Załóżmy, że Y ma rozkład dyskretny określony na liczbach naturalnych. Jeśli w dodatku ograniczymy zainteresowanie do zmiennych $I_d(Y)$ o wartościach $d = 0, 1, 2, 3, \ldots$, to pokaż, że

$$E[I_{d+1}(Y)] = E[I_d(Y)] - P(Y > d)$$

13. Kapitał początkowy wynosi $w = 100$. Inwestor ma awersję do ryzyka z funkcją $u(w) = -\exp(-\alpha w), \alpha > 0$. Szkoda mu zagrażająca ma rozkład wykładniczy $X \sim Exp(2)$. Jaką składkę G jest gotowy płacić inwestor?

4 Rachunek prawdopodobieństwa

Wymagane pojęcia, fakty:

Prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne; rozwiązywanie zadań. Rozkłady zmiennych i wektorów losowych; zmienne losowe ciągłe i dyskretne. Pojęcie ciągu niezależnych zmiennych losowych.Wartość oczekiwana z.l., momenty z.l., wariancja.Warunkowe prawdopodobieństwo i wartość oczekiwana. Przypadek gdy warunek ma dodatnie prawdopodobieństwo. Nierówność Czebyszewa. Zbieżność wg prawdopodobieństwa i wg rozkładu. Słabe prawo wielkich liczb. Twierdzenie graniczne Poissona i centralne twierdzenie graniczne.

Wymagane umiejętności:

Proste zadania kombinatoryczne. Dystrybuanta, gęstość, funkcja prawdopodobieństwa. Obliczanie rozkładów przekształconych zmiennych lub wektorów losowych. Na przykład gdy jest znana gęstość zmiennej losowej X to jaka jest gęstość zmiennej losowej h(X). Podobnie dla wektorów. Wzory na rozkład normalny (zmiennej losowej i wektora losowego), rozkład dwumianowy i rozkład Poissona. Niezależność dwóch i więcej zmiennych losowych. Pojęcie ciągu niezależnych zmiennych losowych. Niezależność ciągu zdarzeń. Umiejętność liczenia wartości oczekiwanej zmiennej losowe dla przypadku ciągłego i dyskretnego. Wzór na wariancję sumy (przypadek zmiennych zależnych i niezależnych). Warianty twierdzenia Czebyszewa. Wykorzystanie centralnego twierdzenia granicznego do zadań praktycznych. Zadania na aproksymacje rozkładu dwumianowego i innych rozkładem Poissona. Zastosowanie transformat do obliczania rozkładów sum niezależnych zmiennych losowych i twierdzeń granicznych. Wykorzystanie twierdzeń granicznych (centralnego twierdzenia granicznego i twierdzenia Poissona) do zadań aplikacyjnych.

Przykładowe zadania

1. Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z wektorem średniej $(2,1)$ i macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz $Z = X + 2Y$. Ciąg $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{100}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jak Z. Oszacować

$$\mathbb{P}(Z_1 + \ldots + Z_{100} \in (400 - 10\sqrt{10}, 400 + 10\sqrt{10})).$$

2. a) Wykonujemy co sekundę doświadczenie Bernoulliego aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y mierzony w sekundach czas oczekiwania na pierwszy sukces. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych X i Y.
b) Przypuśćmy, że zamiast doświadczeń wykonywanych co sekundę, sa one dokonywane co $1/n$ sekundy. Niech prawdopodobieństwo sukcesu wynosi λ/n. Przez Y_n oznaczamy czas oczekiwania na pierwszy sukces mierzony w sekundach. Wyznaczyć ogon dystrybuanty Y_n oraz zbadać jego zachowanie gdy $n \to \infty$.

3. Wektor (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, \; x, y > 0, & x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wyznaczyć: a) stałą C, b) $P(X = Y)$, c) $P(X > Y)$, d) dystrybuantę X.

4. Na poczcie pojawia się 400 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty/wypłaty X_i, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, zerowej średniej, i wariancji równej 100. Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem 0,99 na koniec dnia nie zabrakło gotówki.

Zakładamy, że w ciągu dnia naczelnik poczty uzupełnia ze swojej kieszeni, ale wieczorem odzyskuje, jeśli na koniec dnia jest wynik dodatni.

5. Wykonanie pewnej pracy zajmuje czas losowy z średnią 5 i wariancją 4. Zakłada się, że czasy pracy kolejnych prac są niezależne o jednakowym rozkładzie. Oszacować prawdopodobieństwo, że przynajmniej 50 prac zostanie wykonanych w przeciągu 240 godzin.

6. Niech dla każdego n zmienne losowe $\xi_{n,j}, j = 1, \ldots, n$ są niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym na $[-n, n]$. Zdefiniujmy indykatorowe zmienne trafień w odcinek $(a, b) \subset [-n, n]$, gdzie $a < b$

$$I_{nj} = \mathbf{1}(\xi_{n,j} \in (a, b)), \qquad j = 1, \ldots, n$$

oraz liczbę trafień

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} I_{nj}.$$

Oblicz średnią i wariancję S_n.
Udowodnić z powołaniem się na twierdzenia, że S_n zbiega do rozkładu Poissona z parametrem λ. Ile wynosi λ?