Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Komisja Egzaminów
Dyplomowych

Zakres egzaminu magisterskiego dla specjalności

Matematyka w ekonomii

(obowiązuje studentów studiujących wg programu z 1 X 2019 bądź późniejszego)

1 Statystyka

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Statystyki opisowe. Mediana, modalna, kwantyle rozkładu, porównywanie rozkładów z rozkładem normalnych.

2. Podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa i ich własności: dwumianowy, wielomianowy, ujemny dwumianowy, Poissona, gamma, chi-kwadrat, beta, normalny, wielowymiarowy normalny, t-Studenta, F-Snedecora, mieszanki rozkładów.

3. Nieobciążoność estymatorów, błąd średniokwadratowy i wariancja estymatora. Estymacja nieobciążona o minimalnej wariancji.

4. Statystyki pozycyjne i ich własności (w kontekście estymatorów największej wiarogodności), np. wyliczenie rozkładu maximum lub minimum.

5. Estymatory punktowe i przedziałowe.

6. Estymatory największej wiarogodności.

7. Testy parametryczne dla średniej, wariancji i frakcji.

8. Porównywanie dwóch populacji: testy dla dwóch średnich i wariancji.

9. Testy nieparametryczne. Dopasowanie rozkładu do danych. Testy zgodności.

Przykładowe zadania

1. Niech $X_1, X_2, \cdots, X_n$ będzie próbą losową z rozkładu jednostajnego $U(0, \theta), \theta > 0$, o gestości

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\mathbf{1}_{(\mathbf{0},\theta)}(\mathbf{x}).$$

Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru θ.

2 Ekonometria / Modele liniowe

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Estymacja parametrów za pomocą metody najmniejszych kwadratów w modelu liniowym z jedną zmienną objaśniającą i wyrazem wolnym.

2. Estymacja parametrów za pomocą metody najmniejszych kwadratów w modelu liniowym z dowolną liczbą zmiennych objaśniających.

3. Założenia modelu liniowego Gaussa-Markowa. Estymacja macierzy kowariancji estymatorów parametrów. Przedziały ufności dla parametrów.

4. Prognoza w modelu liniowym Gaussa-Markowa.

5. Testowanie hipotez o istotności parametrów w modelu liniowym Gaussa-Markowa.

6. Dobór zmiennych objaśniających do modelu Gaussa-Markowa za pomocą procedur krokowych.

7. Weryfikacja założeń modelu Gaussa-Markowa.

8. Estymacja parametrów modelu liniowego odporna na zależność obserwacji w czasie i na heteroskedastyczność.

9. Modele linearyzowalne do modelu Gaussa-Markowa.

Przykładowe zadania

1. Dany jest następujący model liniowy:

$$Y_i = \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

spełniający założenia modelu Gaussa-Markowa. Dla tego modelu:

(a) Oblicz estymatory metody najmniejszych kwadratów parametrów β_1 i β_2 uzyskane metodą najmniejszych kwadratów, wiedząc, że $n = 22$, $\sum_{i=1}^{22} x_{1,i}^2 = 17$, $\sum_{i=1}^{22} x_{1,i}x_{2,i} = 13$, $\sum_{i=1}^{22} x_{1,i}^2 = 10$, $\sum_{i=1}^{22} x_{1,i}y_i = 2$, $\sum_{i=1}^{22} x_{2,i}y_i = 2$ i $\sum_{i=1}^{22} {y_i}^2 = 10$.

(b) Oblicz współczynnik determinacji lub napisz, że jest on nieokreślony w tym modelu.

(c) Dla danych z podpunktu b) wyznacz przedziały ufności na poziomie ufności $0,95$ dla parametrów β_1 i β_2. Podaj ich interpretację.

(d) Przetestuj istotność każdego z parametrów z osobna na poziomie istotności $0,05$.

3 Szeregi czasowe

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Szereg czasowy z dyskretnym parametrem czasowym jako proces stochastyczny.
2. Stacjonarny szereg czasowy w szerszym sensie i jego charakteryzacja poprzez funkcje autokorelacji i średniej.
3. Klasyczny model szeregu czasowego jako suma funkcji trendu, funkcji sezonowości i błędu losowego utożsamianego z stacjonarnym szeregiem czasowym.
4. Ogólne modele szeregów czasowych.
5. Modele stacjonarnych szeregów czasowych (proces białego szumu, proces średniej ruchomej, proces autoregresji, mieszany proces autoregresji i średniej ruchomej tj. model ARMA, procesy liniowe).

Przykładowe zadania

1. Sformułować definicje:

(i) stacjonarnego procesu gaussowskiego,

(ii) białego szumu,

(iii) próbkowej funkcji autokowariancji,

(iv) próbkowej funkcji autokorelacji,

(v) procesu MA(q),

(vi) procesu AR(p),

(vii) prcesu ARMA(p,q),

(viii) średniokwadratowej optymalnej prognozy liniowej zmiennej losowej Y wzgledem zmiennej losowej X,

(ix) procesu liniowego,

(x) funkcji autokorelacji czastkowej procesu stacjonarnego.

2. Odpowiedz i krótko uzasadnij:

(i) Czy funkcja $f(h) = (-1)^{|h|}$ jest funkcją autokowariancji?

(ii) Czy funkcja $f(h) = (-1)^{|h|} + 4\cos(\frac{1}{2}h)$ jest funkcją autokowariancji?

(iii) Czy procesy $\{X_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, ..\}$ oraz $\{Y_t : t = 0, \pm 1, \pm 2, ..\}$ zadane odpowiednio równaniami

$$X_t = a + bZ_t + cZ_{t-1} \quad \text{i} \quad Y_t = Z_t Z_{t-1},$$

gdzie $\{Z_t\}_{-\infty}^{+\infty}$ $IID(0, \sigma^2)$ szum oraz a, b i c są stałymi, są procesami stacjonarnymi w szerszym sensie?

(iv) Wyznacz funkcje wartości oczekiwanej oraz funkcję autokowariancji i autokorelacji procesów z punktu (iii).

3. Sprawdź czy proces X_t zadany równaniem

$$X_t + 0,2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t,$$

gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$

(i) jest wynikowy?

(ii) jest odwracalny?

4. Niech X_1, X_2 będą obserwacjami procesu postaci $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, gdzie $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$. Wyznacz najlepszą liniową estymację wartości X_3 w terminach X_1 i X_2.

4 Rachunek prawdopodobieństwa

Wymagane pojęcia, fakty:

Prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne; rozwiązywanie zadań. Rozkłady zmiennych i wektorów losowych; zmienne losowe ciągłe i dyskretne. Pojęcie ciągu niezależnych zmiennych losowych.Wartość oczekiwana z.l., momenty z.l., wariancja.Warunkowe prawdopodobieństwo i wartość oczekiwana. Przypadek gdy warunek ma dodatnie prawdopodobieństwo. Nierówność Czebyszewa. Zbieżność wg prawdopodobieństwa i wg rozkładu. Słabe prawo wielkich liczb. Twierdzenie graniczne Poissona i centralne twierdzenie graniczne.

Wymagane umiejętności:

Proste zadania kombinatoryczne. Dystrybuanta, gęstość, funkcja prawdopodobieństwa. Obliczanie rozkładów przekształconych zmiennych lub wektorów losowych. Na przykład gdy jest znana gęstość zmiennej losowej X to jaka jest gęstość zmiennej losowej h(X). Podobnie dla wektorów. Wzory na rozkład normalny (zmiennej losowej i wektora losowego), rozkład dwumianowy i rozkład Poissona. Niezależność dwóch i więcej zmiennych losowych. Pojęcie ciągu niezależnych zmiennych losowych. Niezależność ciągu zdarzeń. Umiejętność liczenia wartości oczekiwanej zmiennej losowe dla przypadku ciągłego i dyskretnego. Wzór na wariancję sumy (przypadek zmiennych zależnych i niezależnych). Warianty twierdzenia Czebyszewa. Wykorzystanie centralnego twierdzenia granicznego do zadań praktycznych. Zadania na aproksymacje rozkładu dwumianowego i innych rozkładem Poissona. Zastosowanie transformat do obliczania rozkładów sum niezależnych zmiennych losowych i twierdzeń granicznych. Wykorzystanie twierdzeń granicznych (centralnego twierdzenia granicznego i twierdzenia Poissona) do zadań aplikacyjnych.

Przykładowe zadania

1. Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z wektorem średniej $(2, 1)$ i macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz $Z = X + 2Y$. Ciąg $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{100}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jak Z. Oszacować

$$\mathbb{P}(Z_1 + \ldots + Z_{100} \in (400 - 10\sqrt{10}, 400 + 10\sqrt{10})).$$

2. a) Wykonujemy co sekundę doświadczenie Bernoulliego aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y mierzony w sekundach czas oczekiwania na pierwszy sukces. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych X i Y.
b) Przypuśćmy, że zamiast doświadczeń wykonywanych co sekundę, sa one dokonywane co $1/n$ sekundy. Niech prawdopodobieństwo sukcesu wynosi λ/n. Przez Y_n oznaczamy czas oczekiwania na pierwszy sukces mierzony w sekundach. Wyznaczyć ogon dystrybuanty Y_n oraz zbadać jego zachowanie gdy $n \to \infty$.

3. Wektor (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, \ x, y > 0, & x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wyznaczyć: a) stałą C, b) $P(X = Y)$, c) $P(X > Y)$, d) dystrybuantę X.

4. Na poczcie pojawia się 400 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty/wypłaty X_i, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, zerowej średniej, i wariancji równej 100. Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem 0,99 na koniec dnia nie zabrakło gotówki.

Zakładamy, że w ciągu dnia naczelnik poczty uzupełnia ze swojej kieszeni, ale wieczorem odzyskuje, jeśli na koniec dnia jest wynik dodatni.

5. Wykonanie pewnej pracy zajmuje czas losowy z średnią 5 i wariancją 4. Zakłada się, że czasy pracy kolejnych prac są niezależne o jednakowym rozkładzie. Oszacować prawdopodobieństwo, że przynajmniej 50 prac zostanie wykonanych w przeciągu 240 godzin.

6. Niech dla każdego n zmienne losowe $\xi_{n,j}, j = 1, \ldots, n$ są niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym na $[-n, n]$. Zdefiniujmy indykatorowe zmienne trafień w odcinek $(a, b) \subset [-n, n]$, gdzie $a < b$

$$I_{nj} = \mathbf{1}(\xi_{n,j} \in (a, b)), \qquad j = 1, \ldots, n$$

oraz liczbę trafień

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} I_{nj}.$$

Oblicz średnią i wariancję S_n.
Udowodnić z powołaniem się na twierdzenia, że S_n zbiega do rozkładu Poissona z parametrem λ. Ile wynosi λ?