Instytut Matematyczny **Komisja Egzaminów**
Uniwersytet Wrocławski **Dyplomowych**

Zakres egzaminu magisterskiego dla specjalności

Matematyka nauczycielska

(obowiązuje studentów studiujących wg programu z 1 X 2019 bądź późniejszego)

1 Analiza

Wymagane pojęcia:

- metryka, norma, iloczyn skalarny
- kule, zbiory otwarte, domknięte, gęste, operacje wnętrza i domknięcia
- ciągi zbieżne, ciągi Cauchy'ego, zbieżność punktowa ciągów funkcyjncyh
- przestrzenie zwarte, ośrodkowe, zupełne
- ciągłość funkcji, homeomorfizm
- sigma-ciała i miary
- miara Lebesgue'a
- całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania

1. Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0, 2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz
$$\int_A f \, d\lambda.$$
- Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to
$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda,$$
o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

2. Na zbiorze ciągów zerojedynkowych $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ określamy metrykę wzorem

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = y \\ \frac{1}{2^n} & \text{jeśli } x \neq y \text{ i } n = \min\{k\colon x(k) \neq y(k)\} \end{cases}$$

1. Pokaż, że zbiór tych ciągów, które przyjmują jedynkę dokładnie raz nie jest domknięty.
2. Pokaz, że zbiór tych ciągów, które przyjmują jedynkę dokładnie raz nie jest otwarty.
3. Pokaż, że przestrzeń $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest zwarta.

3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystki punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X, d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y, d') jest homeomorficzna z (X, d), to (Y, d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.

4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$. O zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ powiemy, że jest typu G_δ, jeżeli jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych.

- Czy każdy zbiór otwarty na $\mathbb{R}$ jest sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy $[2, 3)$ jest sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych? Odpowiedź uzasadnij.
- Pokaż, że dla każdego zbioru borelowskiego $E \subseteq \mathbb{R}$ istnieje $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że
  - $E \subseteq A$,
  - $\lambda(A) = \lambda(E)$,
  - A jest typu G_δ.

2 Arytmetyka

Wymagane pojęcia, fakty:

układy pozycyjne, rozwinięcia dziesiętne, ułamki łańcuchowe, liczby pierwsze, kongruencje, podzielność liczb, równania diofantyczne, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Eulera o liczbach względnie pierwszych.

Przykładowe zadania

1. Czy prawdą jest że $7^{1003} \equiv 5 \pmod{27}$?
2. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $2x + 7y = 10$ w liczbach całkowitych.
3. Ile dzielników naturalnych ma liczba $3^{13} \cdot 5^{17} \cdot 7^{19}$?
4. Ile jest ułamków nieskracalnych postaci $\frac{n}{1000}$, gdzie $1 \leqslant n < 1000$?
5. Uzasadnić niewymierność liczby

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \ldots}}}}.$$

Czy jest to liczba algebraiczna?

3 Logika, Wstęp do matematyki

Wymagane pojęcia, fakty:

Formalny zapis z użyciem spójników logicznych i kwantyfikatorów, prawdziwość formuł logicznych dotyczących prostych obiektów (liczb, figur, zbiorów, itp), formalne dowody prostych faktów, zbiory i podstawowe operacje mnogościowe, mnogościowe własności funkcji (np. przeciwobrazy, różnowartościowość, funkcja odwrotna), relacje równoważności i zbiory ilorazowe, zbiory częściowo uporządkowane, elementy minimalne, maksymalne, element najmniejszy, największy, indukcja matematyczna, elementarne własności teorii matematycznych (niesprzeczność, niezależność stwierdzeń, równoważność układów aksjomatów).

Przykładowe zadania

1. Podaj przykład zbioru częściowo uporządkowanego, w którym jest tylko jeden element maksymalny, ale w którym nie ma elementu największego.

2. Sprawdź czy relacja podzielności:

$$a|b \iff \exists_{k\in\mathbb{N}} b = a \cdot k,$$

na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ jest porządkiem częściowym. W zbiorze $A := \{1, 2, \ldots, 24\}$ znajdź wszystkie elementy minimalne i maksymalne. Czy w A jest element najmniejszy? A największy?

3. Mamy daną funkcję $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (gdzie $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$), która ma następujące własności:

(1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ F(\{x\}) = 1$;

(2) $\forall a < b\ \ F((a, b)) = -1$, gdzie (a, b) oznacza otwarty przedział;

(3) jeśli X jest sumą rozłącznych zbiorów Y i Z, to $F(X) = F(Y) + F(Z)$.

Wykonaj następujące polecenia.

(a) Oblicz $F([a, b])$ dla dowolnych $a < b$.

(b) Podaj, wraz z uzasadnieniem, przykład niepustego zbioru U, dla którego $F(U) = 0$.

(c) Uzasadnij, że funkcja F jest nieograniczona.

4. Niech P oznacza zbiór liczb naturalnych większych lub równych 2 i niech $\varphi : P \to P$ będzie funkcją określoną w następujący sposób: dla dowolnego $n \in P$, $\varphi(n)$ jest najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n.

(a) Rozstrzygnij, czy funkcja φ jest różnowartościowa.

(b) Opisz zbiory $\varphi^{-1}(3)$ oraz $\varphi^{-1}(4)$, wraz z uzasadnieniem.

(c) Rozstrzygnij, wraz z uzasadnieniem, czy funkcja φ jest ograniczona.

5. Niech x_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Zapisz przy użyciu symboli logicznych, ale bez użycia symbolu negacji, następującą własność: „ciąg x_n nie jest ciągiem Cauchy'ego".

6. Sprawdź czy następująca relacja jest relacją równoważności na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$:

$$xRy \iff x + y \text{ jest podzielne przez 3.}$$

Jeśli tak to opisz klasy abstrakcji.

7. Uzasadnij, że teoria pewnej funkcji $Q : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, oparta na poniższych aksjomatach (A1)-(A3), jest sprzeczna:

(A1) jeśli X jest zbiorem jednopunktowym, to $Q(X) = 1$;

(A2) jeśli X jest otwartym niepustym przedziałem, $X = (a, b)$, to $Q(X) = 0$;

(A3) jeśli X jest sumą rozłącznych zbiorów Y i Z, to $Q(X) = Q(Y) + Q(Z)$.

8. Teoria pewnego abstrakcyjnego działania # określonego na parach elementów ze zbioru X, zwanego dziedziną działania, i o wartościach w tym samym zbiorze X, oparta jest na następujących aksjomatach:

(#1) $\forall a \in X \ \ a\#a = a$;

(#2) jeśli $a \neq b$, to $a\#b \neq a$ i $a\#b \neq b$;

(#3) $\forall a \in X \ \exists b \in X \ : \ a\#b \neq a$.

Uzasadnij, że teoria tego działania # jest niesprzeczna (opisz model tej teorii, w którym spełnione są wszystkie trzy aksjomaty).
9. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap B$? Odpowiedź uzasadnij.
10. Dane są zbiory A i B oraz funkcja $\pi : A \times B \to A$ określona wzorem $\pi(a, b) = a$. Niech $X, Y \subset A \times B$ będą dowolnymi podzbiorami. Czy z tego, że $\pi[X] \subset \pi[Y]$ wynika, że $X \subset Y$? Odpowiedź uzasadnij.
11. Mamy dany nieskończony ciąg $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$, przy czym jest spełniony następujący warunek:

$$\forall_{n \geqslant 1} \exists_{x \in A_{n+1}} : x \notin A_n.$$

1. Czy stąd wynika, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$?

2. Czy stąd wynika, że zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest nieskończony?

Odpowiedzi uzasadnij.

4 Geometria (*Geometria elementarna, Podstawy geometrii, Konstrukcje geometryczne*)

Wymagane pojęcia, fakty:

miejsce geometryczne w układzie współrzędnych, klasyfikacja i własności izometrii płaszczyzny, przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych, pola powierzchni i objętości brył obrotowych i wielościanów, wielościany platońskie i archimedesowe, wzór Eulera, metoda algebraiczna w konstrukcjach cyrklem i linijką, liczby konstruowalne, elementarne pojęcia i obiekty geometryczne na płaszczyźnie nieeuklidesowej - w modelach Kleina i półpłaszczyznowym

Przykładowe zadania

1. Figura F na płaszczyźnie jest sumą kwadratu o boku 2 i koła o promieniu 1 i o środku w jednym z wierzchołków tego kwadratu. Oblicz pole powierzchni i objętość bryły obrotowej utworzonej przez obracanie figury F wokół jej osi symetrii.
2. Dany jest ośmiościan platoński o krawędziach długości a. Znajdź średnicę tego ośmiościanu, tzn odległość pomiędzy dowolnymi dwoma niesąsiednimi (tzn. nie sąsiadującymi przez krawędź) wierzchołkami tego ośmiościanu.
3. W dowolnym modelu geometrii nieeuklidesowej skonstruuj i dokładnie opisz przykład czworokąta mającego trzy kąty proste i jeden kąt ostry. Uzasadnij poprawność swojego przykładu.
4. Uzasadnij (korzystając ze wzoru Eulera), że nie istnieje wielościan wypukły, którego **każda** ściana jest siedmiokątem.
5. Zakładając, że dane są odcinki o długościach a, b i c oraz odcinek jednostkowy, podać konstrukcję odcinka o długości $\frac{ab}{c} + \sqrt{bc+1}$.
6. Uzasadnij, że dla dowolnego danego trójkąta wykonalna jest konstrukcja cyrklem i linijką konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego trójkąta.
7. Niech dany będzie okrąg Σ oraz punkt A leżący wewnątrz tego okręgu. Znaleźć miejsce geometryczne punktów X takich, że odległość AX jest równa odległości punktu X od danego okręgu (podać również rozwiązanie analityczne.)
8. W pewnej izometrii płaszczyzny obrazem punktu $A = (1,2)$ jest punkt $A' = (5,8)$, punktu $B = (3,0)$ - punkt $B' = (3,10)$, a punktu $C = (0,0)$ - punkt $C' = (6,10)$.

1. Przedstawić tę izometrię jako złożenie symetrii osiowych.
2. Podać opis tej izometrii jako przekształcenia w zbiorze liczb zespolonych.
3. Rozpoznać jaki to rodzaj izometrii (obrót, translacja, odbicie czy symetria z poślizgiem) i wyznaczyć jej odpowiednie parametry (środek i kąt, oś, wektor, itp).