Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Komisja Egzaminów
Dyplomowych

Zakres egzaminu magisterskiego dla specjalności

Matematyka stosowana

(obowiązuje studentów studiujących wg programu z 1 X 2019 bądź późniejszego)

1 Modelowanie deterministyczne

Wymagane pojęcia, fakty:
Modele wzrostu i rozwoju populacji (model Malthusa i prawo Verhulsta, model Lotki-Volterry, modele symbiozy i konkurencji), równanie dyfuzji, układy reakcji-dyfuzji modelujące epidemię, niestabilność Turinga.

Przykładowe zadania

1. Załóżmy, że populacja w obecności drapieżników rozwija się zgodnie z równaniem

$$\frac{dN}{dt} = N\left(1 - N\right) - \frac{aN}{1 + bN}, \quad a, b > 0.$$

(a) Wyznacz stany stacjonarne.

(b) Określ stabilność wyznaczonych stanów stacjonarnych.

2. Załóżmy, że populacja rozwijająca się zgodnie z równaniem

$$\frac{dN}{dt} = N(1 - N),$$

poddana została odłowom na stałym poziomie E.

(i) Znajdź maksymalny możliwy odłów.

(ii) Dla modelu z odłowami wyznacz stany stacjonarne i określ ich stabilność.

3. Rozpatrzmy model epidemiologiczny SIR opisany następującym układem równań różniczkowych

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha I + \gamma R \quad (1)$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I - \alpha I \quad (2)$$
$$\frac{dR}{dt} = \mu I - \gamma R \quad (3)$$

(i) Opisz jak przebiega opisana tym modelem choroba.

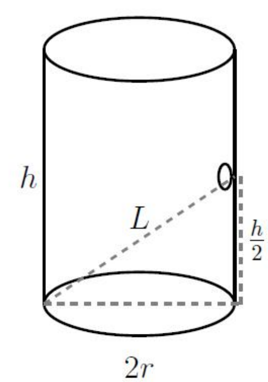
(ii) Skorzystaj z parametryzacji $s = S/N$, $i = I/N$, $T = \beta Nt$, $a = \alpha/\beta N$, $b = \gamma/N$ i $c = \mu/N$, aby uczynić model bezwymiarowym.

(iii) Wyznacz stany stacjonarne i zbadaj ich stabilność.

(iv) Jaki jest warunek, który muszą spełniać parametry modelu aby choroba została wyeliminowana z populacji?

4. (Problem Keplera). W roku 1613 Kepler postanowił kupić kilka beczek wina na swoje ślubne przyjęcie. Aby obliczyć koszt, kupiec zanurza miernik przez otwór na szpunt, jak pokazano na rysunku 1, i mierzy długość L "mokrej" części pręta mierniczego. Koszt beczki wina jest ustalony proporcjonalnie do L. Kepler zauważył, że beczki mają różne kształty. Niektóre są wysokie i chude, podczas gdy inne są przysadziste i grube. Domyślał się, że przy tej samej wielkości L beczki o różnych kształtach zawierają równe ilości wina. Znając matematykę, postanowił ustalić jaki kształt beczki byłby najbardziej dla niego korzystny.
Rozwiąż problem rozważany przez Keplera gdy dla uproszczenia przyjmiemy, że beczki mają kształt walca. Znajdź proporcje (wysokość: promień) walca, który ma największą objętość przy założeniu stałej długości L (przerywany odcinek na rysunku 2).

Przyjmujemy następujące założenia:
1. Beczka ma kształt walca.
2. Otwór na szpunt znajduje się w połowie wysokości beczka.
3. Beczka jest pełna.



Rysunek 1: Ilustracja problemu Keplera dla cylindrycznej beczki o średnicy $2r$ i wysokość h. Założyliśmy, że wysokość otwór na szpunt to $h/2$. Długość L oznacza "mokrą" część pręta pomiarowego kupca, służącą do określenia ceny.

2 Modelowanie stochastyczne

Wymagane pojęcia, fakty:

Klasyfikacja procesów stochastycznych (procesy gaussowskie, procesy stacjonarne w szerszym sensie, procesy stacjonarne i o przyrostach stacjonarnych, procesy o przyrostach niezależnych, procesy Markowa), łancuchy Markowa i procesy Markowa w czasie ciagłym z przeliczalną przestrzenią stanów (klasyfikacja stanów, rozkład stacjonarny, twierdzenia ergodyczne), proces urodzin i śmierci, proces Poissona, złożony proces Poissona, proces odnowy, proces Wienera (podstawowe własności trajektorii, mocna własność Markowa, zasada odbicia), symulacja zmiennych losowych i procesów losowych, symulacja Monte Carlo.

Przykładowe zadania

1. Niech $\{N(t), t \geqslant 0\}$ będzie procesem Poissona z intensywnością λ. Niech t i T będą ustalonymi chwilami, takimi, że $0 \leqslant t \leqslant T$, a n i k dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $k \leqslant n$. Wyznacz prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $\{N(t) = k\}$ wiedząc, że $\{N(T) = n\}$.

2. Rozpatrzmy następujący model mutacji nici DNA. Każdy nukleotydy podlega mutacji w sposób niezależny od pozostałych nukleotydów. Przy każdej replikacji nici DNA, każdy z czterech nukleotydów **A,C,G,T** może zostać zastąpiony przez nukleotyd innego typu z tym samym ustalonym prawdopodobieństwem α.

(a) Zaproponuj model matematyczny opisujący tak opisany proces mutacji.

(b) Załóżmy, że w wybranym miejscu nici DNA znajduje się początkowo nukleotyd **C**. Jaka jest średnia liczba replikacji do momentu pojawienia się nukleotydu **G** w tym ustalonym miejscu nici DNA?

(c) Zakładamy, że nić DNA podlegała bardzo dużej liczbie replikacji. Jakiej częstości poszczególnych nukleotydów możemy się wtedy spodziewać w jej składzie.

3. Rozważmy łańcuch Markowa $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ z przestrzenią stanów $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ i macierz przejść

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

gdzie $0 < a$, $b < 1$. Definiujemy nowy proces stochastyczny $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ przyjmując

$$Z_n = (X_{n-1}, X_n), \quad n > 1.$$

Wykaż, że $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$ jest łańcuchem Markowa i wyznacz jego macierz przejścia.

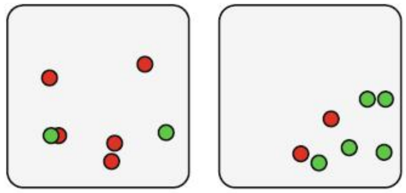
4. Zaczynasz od pięciu kości. Rzuć wszystkie kostki i odłóż te kości, na których pojawią się szóstkitki. Następnie rzuć pozostałymi kośćmi, odkładając kości, na których pojawią się szóstkitki, i tak dalej. Niech X_n będzie liczbą kości, które po n-rzutach dały w wyniku szóstkami.

(a) Opisz macierz prawdopodobieństw przejść $\mathbf{P}$, dla tego łańcucha Markowa.

(b) Znajdź prawdopodobieństwo zdobycia wszystkich szóstek po trzech rzutach.

(c) Jakiej postaci macierzy przejść po 100 krokach $\mathbf{P}^{100}$ oczekujesz?

5. (Model Bernoulliego - Laplace'a). Rozważmy dwa pudełka i łącznie $2N$ kulek, z których N jest koloru czerwonego i N zielonego. W chwili początkowej, $k = X_0$ czerwonych kulek i $N-k$ zielonych kulek znajduje się w pierwszym pudełku, a pozostałe $N-k$ czerwonych kulek i k zielonych kulek znajduje się w drugim pudełku.



Rysunek 2: Przykład stanu procesu opisanego przez model Bernoulliego - Laplace'a gdy $N = 5$.

W każdej jednostce czasu losowo wybiera się jedną kulę z N kulek z każdego pudełku, i zamienia się je miejscami. Pokaż, że proces $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ z przestrzenią stanów $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, reprezentujący liczbę czerwonych kul w pierwsze pudełko jest łańcuchem Markowa. Na początek możesz rozważyć $N = 5$.

6. Rozważmy łańcuch Markowa $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ z przestrzenią stanów $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ i macierzą przejścia

$$P = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie uwagę $p \in [0, 1)$, i $q = 1 - p$.

(a) Podaj rozkład prawdopodobieństwa pierwszego trafienia $T_2 := \inf\{n \geqslant 0 \,:\, X_n = 2\}$, do stanu 2, gdy łańcuch Markowa startuje ze stanu 0.

(b) Oblicz średni czas trafienia

$$\mathrm{E}\left[T_2 \,|\, X_0 = 0\right]$$

do stanu 2, gdy łańcuch startuje ze stanu 0, $(X_0 = 0)$.

Wskazówka. *Suma* $Z = X_1 + \cdots + X_n$ *niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie geometrycznym geometrycznych na* $\{1, 2, \ldots\}$ *ma rozkład ujemnie dwumianowy*

$$P(Z = k \,|\, X_0 = 1) = \binom{k-1}{k-d}(1-p)^d p^{k-d}, \quad k \geqslant d.$$

3 Równania różniczkowe

Wymagane pojęcia, fakty:

Tw. Banacha o kontrakcji i jego zastosowanie do równań różniczkowych. Klasyczny rachunek wariacyjny i równanie Eulera-Lagrange'a. Zagadnienie izoperymetryczne. Przestrzenie Sobolewa. Słabe rozwiązania liniowych równań eliptycznych. Wartości własne i funkcje własne laplasjanu. Rozwiązania równania ciepła w obszarze ograniczonym.

Przykładowe zadania

1. Niech u_0 będzie funkcją ciągłą na $[0,1]$, natomiast $K(x,y)$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na $[0,1]\times[0,1]$. Dla jakiego λ równanie

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy,$$

ma dokładnie jedno ciągłe rozwiązanie na $[0,1]$.

2. Znaleźć infimum funkcjonału

$$I(u) = \int_0^{\log 2} \left[(u'(x)-1)^2 + u(x)^2 \right] dx$$

dla dowolnych funkcji $u = u(x)$ klasy C^1.

3. Udowodnić, że równanie $-\Delta u + u = f$, rozważane w obszarze ograniczonym, z warunkiem brzegowym Dirichleta, ma dokładnie jedno słabe rozwiązanie dla dowolnej funkcji $f = f(x)$ całkowalnej z kwadratem.

4. Pokazać, że funkcja $u = u(x)$ - będąca rozwiązaniem równania $-\Delta u + u = f$ z warunkiem brzegowym Dirichleta, rozważanym w obszarze ograniczonym, jest nieujemne prawie wszędzie, jeżeli nieujemna jest funkcja $f = f(x)$.

4 Rachunek prawdopodobieństwa

Wymagane pojęcia, fakty:
Prawdopodobieństwo klasyczne i geometryczne; rozwiązywanie zadań. Rozkłady zmiennych i wektorów losowych; zmienne losowe ciągłe i dyskretne. Pojęcie ciągu niezależnych zmiennych losowych.Wartość oczekiwana z.l., momenty z.l., wariancja.Warunkowe prawdopodobieństwo i wartość oczekiwana. Przypadek gdy warunek ma dodatnie prawdopodobieństwo. Nierówność Czebyszewa. Zbieżność wg prawdopodobieństwa i wg rozkładu. Słabe prawo wielkich liczb. Twierdzenie graniczne Poissona i centralne twierdzenie graniczne.

Wymagane umiejętności:
Proste zadania kombinatoryczne. Dystrybuanta, gęstość, funkcja prawdopodobieństwa. Obliczanie rozkładów przekształconych zmiennych lub wektorów losowych. Na przykład gdy jest znana gęstość zmiennej losowej X to jaka jest gęstość zmiennej losowej h(X). Podobnie dla wektorów. Wzory na rozkład normalny (zmiennej losowej i wektora losowego), rozkład dwumianowy i rozkład Poissona. Niezależność dwóch i więcej zmiennych losowych. Pojęcie ciągu niezależnych zmiennych losowych. Niezależność ciągu zdarzeń. Umiejętność liczenia wartości oczekiwanej zmiennej losowe dla przypadku ciągłego i dyskretnego. Wzór na wariancję sumy (przypadek zmiennych zależnych i niezależnych). Warianty twierdzenia Czebyszewa. Wykorzystanie centralnego twierdzenia granicznego do zadań praktycznych. Zadania na aproksymacje rozkładu dwumianowego i innych rozkładem Poissona. Zastosowanie transformat do obliczania rozkładów sum niezależnych zmiennych losowych i twierdzeń granicznych. Wykorzystanie twierdzeń granicznych (centralnego twierdzenia granicznego i twierdzenia Poissona) do zadań aplikacyjnych.

Przykładowe zadania

1. Niech (X, Y) będzie wektorem losowym z wektorem średniej $(2, 1)$ i macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

oraz $Z = X + 2Y$. Ciąg $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{100}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jak Z. Oszacować

$$\mathbb{P}(Z_1 + \ldots + Z_{100} \in (400 - 10\sqrt{10}, 400 + 10\sqrt{10})).$$

2. a) Wykonujemy co sekundę doświadczenie Bernoulliego aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y mierzony w sekundach czas oczekiwania na pierwszy sukces. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p. Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych X i Y.
b) Przypuśćmy, że zamiast doświadczeń wykonywanych co sekundę, sa one dokonywane co $1/n$ sekundy. Niech prawdopodobieństwo sukcesu wynosi λ/n. Przez Y_n oznaczamy czas oczekiwania na pierwszy sukces mierzony w sekundach. Wyznaczyć ogon dystrybuanty Y_n oraz zbadać jego zachowanie gdy $n \to \infty$.

3. Wektor (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} Cxy, \; x, y > 0, & x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Wyznaczyć: a) stałą C, b) $P(X = Y)$, c) $P(X > Y)$, d) dystrybuantę X.

4. Na poczcie pojawia się 400 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty/wypłaty X_i, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie, zerowej średniej, i wariancji równej 100. Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem 0,99 na koniec dnia nie zabrakło gotówki.

Zakładamy, że w ciągu dnia naczelnik poczty uzupełnia ze swojej kieszeni, ale wieczorem odzyskuje, jeśli na koniec dnia jest wynik dodatni.

5. Wykonanie pewnej pracy zajmuje czas losowy z średnią 5 i wariancją 4. Zakłada się, że czasy pracy kolejnych prac są niezależne o jednakowym rozkładzie. Oszacować prawdopodobieństwo, że przynajmniej 50 prac zostanie wykonanych w przeciągu 240 godzin.

6. Niech dla każdego n zmienne losowe $\xi_{n,j}, j = 1, \ldots, n$ są niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym na $[-n, n]$. Zdefiniujmy indykatorowe zmienne trafień w odcinek $(a, b) \subset [-n, n]$, gdzie $a < b$

$$I_{nj} = \mathbf{1}(\xi_{n,j} \in (a, b)), \qquad j = 1, \ldots, n$$

oraz liczbę trafień

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} I_{nj}.$$

Oblicz średnią i wariancję S_n.
Udowodnić z powołaniem się na twierdzenia, że S_n zbiega do rozkładu Poissona z parametrem λ. Ile wynosi λ?