Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Komisja Egzaminów Dyplomowych

Zakres egzaminu magisterskiego dla specjalności

Matematyka teoretyczna

(obowiązuje studentów studiujących wg programu z 1 X 2019 bądź późniejszego)

W trakcie egzaminu oprócz dwóch zadań z Analizy i Algebry (punkty 1. i 2. zakresu), student specjalności teoretycznej otrzymuje również dwa zadania z dwóch zakresów (punkty 3-9 poniżej), uprzednio wybranych w trakcie zapisów na egzamin.

1 Analiza

Wymagane pojęcia:

- metryka, norma, iloczyn skalarny
- kule, zbiory otwarte, domknięte, gęste, operacje wnętrza i domknięcia
- ciągi zbieżne, ciągi Cauchy'ego, zbieżność punktowa ciągów funkcyjncych
- przestrzenie zwarte, ośrodkowe, zupełne
- ciągłość funkcji, homeomorfizm
- sigma-ciała i miary
- miara Lebesgue'a
- całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania

1. Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0, 2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz

$$\int_A f \, d\lambda.$$

- Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to

$$\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda,$$

o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

2. Na zbiorze ciągów zerojedynkowych $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ określamy metrykę wzorem

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = y \\ \frac{1}{2^n} & \text{jeśli } x \neq y \text{ i } n = \min\{k\colon x(k) \neq y(k)\} \end{cases}$$

1. Pokaż, że zbiór tych ciągów, które przyjmują jedynkę dokładnie raz nie jest domknięty.
2. Pokaz, że zbiór tych ciągów, które przyjmują jedynkę dokładnie raz nie jest otwarty.
3. Pokaż, że przestrzeń $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest zwarta.

3. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystki punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X,d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y,d') jest homeomorficzna z (X,d), to (Y,d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.

4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$. O zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ powiemy, że jest typu G_δ, jeżeli jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych.

- Czy każdy zbiór otwarty na $\mathbb{R}$ jest sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy $[2,3)$ jest sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych? Odpowiedź uzasadnij.
- Pokaż, że dla każdego zbioru borelowskiego $E \subseteq \mathbb{R}$ istnieje $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że
  - $E \subseteq A$,
  - $\lambda(A) = \lambda(E)$,
  - A jest typu G_δ.

2 Algebra

Wymagane pojęcia, fakty:

Algebra liniowa: przestrzenie liniowe, baza i wymiar, odwzorowania liniowe i ich macierze, funkcjonały i formy kwadratowe, formy hermitowskie, twierdzenie Sylvestera, przestrzenie euklidesowe i unitarne, endomorfizmy samosprzężone/hermitowskie/ortogonalne/unitarne, wartości i wektory własne, diagonalizacja, twierdzenie spektralne dla operatora samosprzężonego/hermitowskiego/unitarnego, klasyfikacja izometrii przestrzeni euklidesowych, twierdzenie Jordana.

Algebra abstrakcyjna: grupy, pierścienie i ciała, grupy permutacji, podgrupy i twierdzenie Lagrange'a, działania grup na zbiorach, twierdzenie o orbicie i stabilizatorze, podgrupy normalne i ideały, grupy i pierścienie ilorazowe, homomorfizmy, zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie grup, centrum, komutant, twierdzenia Sylowa, struktura grup abelowych skończenie generowanych, grupy rozwiązalne, grupa wolna, pierścienie euklidesowe, PID oraz UFD ze szczególnym uwzględnieniem pierścienia liczb całkowitych i pierścieni wielomianów, ciała proste, charakterystyka ciała.

Przykładowe zadania

1. Przypomnijmy, że dla grupy G, elementu $g \in G$ i podzbioru $A \subseteq G$ *centralizator* g w G to zbiór $C_G(g) := \{h \in G : gh = hg\}$, a *centralizator* A w G to zbiór $C_G(A) := \{h \in G : (\forall a \in A)(ah = ha)\}$.

1. Niech G będzie dowolną grupą. Podać definicję centrum grupy G, oznaczanego przez $Z(G)$.
2. Niech H będzie abelową podgrupą grupy G. Dowieść, że $Z(C_G(H)) = C_G(C_G(H))$.
3. Niech H będzie abelową podgrupą skończonego indeksu grupy G. Dowieść, że istnieje abelowa podgrupa K grupy G zawierająca H, która jest przekrojem skończenie wielu centralizatorów elementów grupy G.

2. Podać przykłady czterech parami nieizomorficznych grup rzędu 8 wraz z uzasadnieniem ich nieizomorficzności.

3.

1. Co to znaczy, że pierścień R jest dziedziną (podać definicję)?
2. Niech R będzie dziedziną i $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in R[X]$. Udowodnić, że $P \in R[X]^*$ (tzn. jest odwracalny) wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n = 0$ i $a_0 \in R^*$.
3. Podać przykład pierścienia z jednością R oraz $a \in R \setminus \{0\}$, takiego że $1 + aX \in R[X]^*$.

4. Znaleźć bazę ortonormalną w przestrzeni $P_2[-1, 1]$ wielomianów rzeczywistych stopnia $\leqslant 2$ na przedziale $[-1, 1]$, z iloczynem skalarnym

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{-1}^{1} f_1(x) f_2(x) dx.$$

Podać przykład unitarnego automorfizmu tej przestrzeni różnego od identyczności.

5. Udowodnić lub obalić następujące stwierdzenia:

1. macierz 3×3 o wszystkich wyrazach dodatnich jest dodatnio określona;
2. suma macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określona;
3. iloczyn macierzy dodatnio określonych jest dodatnio określony.

3 Równania różniczkowe

Wymagane pojęcia, fakty:

Tw. Banacha o kontrakcji i jego zastosowanie do równań różniczkowych. Klasyczny rachunek wariacyjny i równanie Eulera-Lagrange'a. Zagadnienie izoperymetryczne. Przestrzenie Sobolewa. Słabe rozwiązania liniowych równań eliptycznych. Wartości własne i funkcje własne laplasjanu. Rozwiązania równania ciepła w obszarze ograniczonym.

Przykładowe zadania

1. Niech u_0 będzie funkcją ciągłą na $[0,1]$, natomiast $K(x,y)$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na $[0,1] \times [0,1]$. Dla jakiego λ równanie

$$u(x) = u_0(x) + \lambda \int_0^1 K(x,y)u(y)\,dy,$$

ma dokładnie jedno ciągłe rozwiązanie na $[0,1]$.

2. Znaleźć infimum funkcjonału

$$I(u) = \int_0^{\log 2} \left[(u'(x) - 1)^2 + u(x)^2\right] dx$$

dla dowolnych funkcji $u = u(x)$ klasy C^1.

3. Udowodnić, że równanie $-\Delta u + u = f$, rozważane w obszarze ograniczonym, z warunkiem brzegowym Dirichleta, ma dokładnie jedno słabe rozwiązanie dla dowolnej funkcji $f = f(x)$ całkowalnej z kwadratem.

4. Pokazać, że funkcja $u = u(x)$ - będąca rozwiązaniem równania $-\Delta u + u = f$ z warunkiem brzegowym Dirichleta, rozważanym w obszarze ograniczonym, jest nieujemne prawie wszędzie, jeżeli nieujemna jest funkcja $f = f(x)$.

4 Teoria prawdopodobieństwa

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Funkcje charakterystyczne. Różne wersje Centralnego Twierdzenia Granicznego (np. Twierdzenie Lindenberga-Fellera).
2. Warunkowa wartość oczekiwana.
3. Martyngały z czasem dyskretnym. Czasy zatrzymania i twierdzenie Doob'a. Twierdzenia o zbieżności prawie wszędzie martyngału.
4. Ruch Browna. Konstrukcja. Podstawowe własności. Martyngały z czasem ciągłym
5. Proces Poissona.

Przykładowe zadania

1. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ o takim samym rozkładzie. Oblicz

$$\mathbb{E}[X_1 | X_1 + \cdots + X_n].$$

2. Niech $\{X_n\}$ będzie prostym spacerem losowym na $\mathbb{Z}$, tzn. $X_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, gdzie $\{Y_n\}_{n \geqslant 1}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $\mathbb{P}[Y_n = -1] = \mathbb{P}[Y_n = 1] = 1/2$. Niech $T = \min\{n : \ X_n = -j \text{ lub } X_n = k\}$ dla ustalonych $k, j > 0$.

- Pokaż, że $M_n = X_n^2 - n$ jest martyngałem.
- Wykorzystując twierdzenie Dooba uzasadnij $\mathbb{E}[T] = jk$.

3. W pojemniku znajduje się pewna liczba cząstek, z których każda w chwili n z równym prawopodobieństwem albo dzieli się na dwie, albo ginie. W chwili 0 liczba cząstek wynosi 1. Pokaż, że z prawdopodobieństwem 1 po pewnym czasie wszystkie cząstki zginą, tzn. w pojemniku nie będzie ani jednej cząstki.

5 Analiza funkcjonalna

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Przestrzenie unormowane, Banacha, Hilberta. Podstawowe przykłady: $\ell^p, L^p(X), C(X), \mathcal{B}(X, Y)$, itp.
2. Operatory: liniowe, ograniczone, odwracalne, sprzężone. Funkcjonały.
3. Spektrum operatora ograniczonego, rezolwenta, promień spektralny, operatory normalne i samosprzężone w przestrzeni Hilberta.
4. Słaba zbieżność ciągów w przestrzeni Banacha. $*$-słaba zbieżność funkcjonałów.
5. Zbieżność operatorów: w normie operatorowej, mocna zbieżność, słaba zbieżność.
6. Operatory: dodatnie, zwarte, Hilberta-Schmidta, unitarne.
7. Twierdzenia: Hahna-Banacha, Banacha-Steinhausa, o odwzorowaniu otwartym, o odwzorowaniu odwrotnym, o wykresie domkniętym, Riesza o postaci funkcjonałów na $C(X)$, Stone'a-Weierstrassa, Arzeli-Ascolego, itp.

Przykładowe zadania

1. a) Sformułuj twierdzenia: o odwzorowaniu otwartym, o odwzorowaniu odwrotnym, o wykresie domkniętym.
b) X jest przestrzenią Banacha względem dwu norm: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, przy czym $\|\cdot\|_1 \leqslant c\|\cdot\|_2$ dla pewnej stałej c. Pokazać, że $\|\cdot\|_2 \leqslant d\|\cdot\|_1$ dla pewnej stałej d.

2. Niech μ będzie miarą na $\mathbb{R}$ z gęstością $e^{-x^2}\,dx$ oraz $1 < p < \infty$. Na przestrzeni $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ dany jest funkcjonał:

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2}\,dx.$$

a) Udowodnij, że ϕ jest funkcjonałem ograniczonym i wyznacz jego normę.
b) Czy istnieje funkcja $f(x)$ dla której funkcjonał osiąga swoją normę? Jeśli tak, to wyznacz wszystkie funkcje, dla których to zachodzi.

3. Rozważny operator L, który funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyporządkowuje funkcję $Lf(x) = x \cdot f(x)$. Niech $L^1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;:\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty\}$ oraz $L^1_x = \{f \in L^1 \;:\; Lf \in L^1\}$. Uzasadnić, że:
a) L^1_x jest właściwą i gęstą podprzestrzenią w L^1,
b) operator $L : L^1_x \to L^1$ nie jest ciągły względem normy L^1.

4. Niech $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Na przestrzeni $\ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;:\; \sum_n |a_n|^2 < \infty\}$ dany jest operator:

$$T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (z_n \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

a) Dla jakich ciągów $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operator T jest ograniczony? Ile wynosi jego norma?
b) Załóżmy, że ciąg z_n zbiega do z_0 i $z_n \neq z_0$ dla $n \geqslant 1$. Wyznaczyć: spektrum, spektrum punktowe i zbiór rezolwenty dla operatora T na ℓ^2.
c) Wskaż ciąg z_n dla którego spektrum operatora T jest odcinek $[0, 1]$ (jako podzbiór $\mathbb{C}$).

5. Niech:

$$Tf(x) = \int_0^x f(u)\,du.$$

a) Udowodnić, że T jest operatorem ograniczonym z $C([0,1])$ do $C([0,1])$ oraz wyznaczyć jego normę.
b) Udowodnić, że T jest operatorem ograniczonym z $L^2([0,1])$ do $L^2([0,1])$.
c) Czy T jest operatorem zwartym z $C([0,1])$ do $C([0,1])$?

6 Topologia algebraiczna

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Homotopia i homotopijna równoważność.
2. Grupa podstawowa i homomorfizm indukowany.
3. Grupa podstawowa okręgu.
4. Zastosowania: zasadnicze twierdzenie algebry, twierdzenie Brouwera o punkcie stałym dla 2-dysku.
5. Twierdzenie van Kampena.
6. Teoria nakryć.
7. Homologie symplicjalne.
8. Homologie singularne.
9. Stopień odwzorowania.
10. Ciąg Mayera-Vietorisa.
11. Związki między grupami homologii a grupą podstawową.

Przykładowe zadania

1. Pokaż, że retrakt przestrzeni ściągalnej jest przestrzenią ściągalną.

2. Wyznacz grupę podstawową 3-wymiarowego torusa z usuniętym jednym punktem, tj. $S^1 \times S^1 \times S^1 \setminus \{pt\}$.

3. Niech Σ_g oznacza orientowalną, zamkniętą (tj. zwartą i bez brzegu) powierzchnię rodzaju (genusu) g (tj. z g dziurami). Pokaż, że grupa podstawowa $\pi_1(\Sigma_4)$ jest izomorficzna z podgrupą grupy $\pi_1(\Sigma_2)$.

4. Niech S^2 będzie dwuwymiarową jednostkową sferą w $\mathbf{R}^3$ o środku w $(0,0,0)$, a I odcinkiem w $\mathbf{R}^3$ o końcach $(0,0,1)$ i $(0,0,-1)$, tj. odcinkiem łączącym bieguny S^2. Wyznacz homologie $S^2 \cup I$.

7 Algebra 2

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Rozszerzenia ciał. Rozszerzenia o pierwiastek wielomianu nierozkładalnego. Ciało rozkładu wielomianu: istnienie, jedyność.
2. Ciało algebraicznie domknięte: definicja. Każde ciało zawiera się w ciele algebraicznie domkniętym (konstrukcja).
3. Pierwiastki z jedności, pierwiastki pierwotne, Grupa pierwiastków z jedności w ciele: każda jej skończona podgrupa jest cykliczna. Wielomiany podziału koła.
4. Rozszerzenia [elementy] algebraiczne, przestępne: definicja. Stopień rozszerzenia. Wielomian minimalny elementu ciała nad podciałem, własności.
5. Rozszerzenia normalne: definicja, własności. Rozszerzenia [elementy, wielomiany] rozdzielcze. Twierdzenie Abela o elemencie pierwotnym.
6. Grupa Galois rozszerzenia ciał. Rozszerzenia Galois: definicja, równoważne własności. Podstawowe twierdzenie teorii Galois, związek z podgrupami normalnymi. Przykłady.
7. Rozszerzenia abelowe, cykliczne, rozwiązalne. Rozszerzenia przez pierwiastniki: definicja, charakteryzacja. Związki z rozwiązalnością równań wielomianowych. Liczby konstruowalne.
8. Rozszerzenia przestępne. Operator algebraicznego domknięcia. Wymiar przestępny. Opis dowolnego rozszerzenia ciał: najpierw czysto przestępne, potem algebraiczne.

Przykładowe zadania

1. Niech $K \subseteq L$ będzie algebraicznym rozszerzeniem ciał i $a, b \in L$. Udowodnić, że jeśli $\deg_K(a)$ i $\deg_K(b)$ są względnie pierwsze, to
$$[K(a,b) : K] = \deg_K(a) \deg_K(b).$$
2. Udowodnić, że liczby $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$ są liniowo niezależne nad ciałem liczb wymiernych.
3. Zilustrować zasadnicze twierdzenie teorii Galois na przykładach następujących rozszerzeń:
   (a) $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$,
   (b) $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\varepsilon_{10})$,
   (c) $\mathbf{F}_2 \subseteq \mathbf{F}_{128}$,
   (d) $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}, \varepsilon_3)$,

   gdzie ε_i jest i-tym pierwotnym pierwiastkiem z 1.
4. Udowodnić, że nie można skonstruować 28-kąta foremnego za pomocą cyrkla i linijki.

8 Logika

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Klasyczny rachunek logiczny.

Ujęcie aksjomatyczne. Dowód formalny. Twierdzenie o dedukcji. Twierdzenia o istnieniu modelu, o pełności i o zwartości. Teorie i ich modele. Niesprzeczność, zupełność teorii. Wnioskowanie syntaktyczne i semantyczne.

2. Wstępne pojęcia i twierdzenia teorii modeli.

Elementarna równoważność i izomorficzność struktur. Odwzorowania elementarne. Gry Ehrenfeuchta-Fraissego. Ciała zbiorów i algebry Boole'a. Zbiory definiowalne. Ultrafiltry. Typy. Modele nasycone. Twierdzenie o omijaniu typów. Kategoryczność teorii. Twierdzenie Rylla-Nardzewskiego o przeliczalnej kategoryczności. Redukcja kwantyfikatorów. Skolemizacja i funkcje Skolema. Twierdzenie Ramseya i zbiory porządkowo nieodróżnialne. Twierdzenie Ehrenfeuchta-Mostowskiego o modelach z dużą grupą automorfizmów. Hierarchia stabilności.

3. Elementy analizy niestandardowej i ultraprodukty.

Modele analizy niestandardowej, ich podstawowe własności. Twierdzenie Łosia o ultraprodukcie. Podstawowe własności ultraproduktów.

4. Elementy teorii rekursji (obliczalności).

Maszyny Turinga. Funkcje i zbiory rekurencyjne i TM-obliczalne. Teza Churcha. Zbiory rekurencyjnie przeliczalne. Rozstrzygalność i nierozstrzygalność teorii. Nierozstrzygalność i niezupełność arytmetyki Peana i teorii mnogości ZFC. Twierdzenia Goedla, Churcha, Turinga, Tarskiego.

Przykładowe zadania

1.Dowieść twierdzenia o dedukcji. Pokazać, że w tym twierdzeniu założenie, że formuła φ jest zdaniem, jest istotne.
2. Dowieść, że struktury $M = (\mathbb{Z}, \leqslant)$ i $N = (\mathbb{Z}, \leqslant) \cup (\mathbb{Z}', \leqslant)$ są elementarnie równoważne. Tu N oznacza liniowy porządek złożony z dwóch kopii $\mathbb{Z}$, jedna za drugą.
3. Udowodnić, że teoria $DLO_0 = Th(\mathbb{Q}, \geqslant)$ ma redukcję kwantyfikatorów.
4. Dowieść, że teoria skończonych liniowych porządków jest rozstrzygalna.
5. Udowodnić, że każda ograniczona niestandardowa liczba rzeczywista ma jedyną część standardową.
6. Wyznaczyć 5-typy w teorii DLO_0 i w teorii BA_0 bezatomowych algebr Boole'a.
7. Podać aksjomaty teorii niezależnych predykatów unarnych $P_n, n < \omega$. Udowodnić, że jest ona zupełna oraz określić, dla których liczb kardynalnych κ jest ona κ-stabilna.
8. Udowodnić twierdzenie o zwartości metodą ultraproduktu.
9. Udowodnić, że zbiór potęg liczby 10 jest definiowalny w strukturze $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leqslant, 0, 1)$.

9 Deskryptywna teoria mnogości

Wymagane pojęcia, fakty:

1. Przestrzenie polskie ze szczególnym naciskiem na przestrzenie zerowymiarowe.
2. Zastosowania twierdzenia Baire'a o zbiorach I kategorii.
3. Zbiory borelowskie; borelowsko generowane topologie polskie; izomorfizmy borelowskie.
4. Schemat Suslina, Łuzina, Cantora.
5. Zbiory analityczne i co-analityczne; twierdzenia o separacji i redukcji; różnowartościowe funkcje borelowskie.
6. Selekcja co-analityczna i inne twierdzenia selekcyjne.
7. Borelowskie zbiory o sekcjach sigma zwartych.
8. Determinacja gier borelowskich.

Przykładowe zadania

1. Czy suma przeliczalnie wielu parami rozłącznych domkniętych podzbiorów prostej może dać niepusty odcinek otwarty?

2. Pokazać, że domknięty podzbiór przestrzeni liczb niewymiernych jest retraktem.

3. Udowodnij, że jeśli przestrzeń polska leży gęsto i co-gęsto w innnej przestrzeni polskiej, to jest homemorficzna z przestrzenią liczb niewymiernych.

4. Czy uzyskamy wszystkie podzbiory borelowskie przestrzeni metrycznej wychodząc od zbiorów domkniętych i iterując operacje przeliczalnego przekroju i przeliczalnej rozłącznej sumy? A wychodząc od zbiorów otwartych?

5. Pokazać, że każdy zbiór analityczny jest rożnowartościowym ciągłym obrazem zbioru co-analitycznego.

6. Bez twierdzenia o co-analitycznej uniformizacji, zbudować co-analityczną selekcję dla zadanego zbioru borelowskiego.