Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Komisja Egzaminów
Dyplomowych

Zakres egzaminu magisterskiego dla specjalności

Matematyka nauczycielska

(obowiązuje studentów studiujących wg programu z 1 X 2022 bądź późniejszego)

1 Analiza

Wymagane pojęcia:

- metryka, norma, iloczyn skalarny
- kule, zbiory otwarte, domknięte, gęste, operacje wnętrza i domknięcia
- ciągi zbieżne, ciągi Cauchy'ego, zbieżność punktowa ciągów funkcyjncyh
- przestrzenie zwarte, ośrodkowe, zupełne
- ciągłość funkcji, homeomorfizm
- sigma-ciała i miary
- miara Lebesgue'a
- całka Lebesgue'a

Przykładowe zadania

1. Rozważmy przestrzeń miarową $(\mathbb{R}, \mathrm{Bor}(\mathbb{R}), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue'a.

- Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2 - 2$. Niech $A = [0,2] \cup \mathbb{Q}$. Oblicz
$$\int_A f \; d\lambda.$$
- Podaj przykład funkcji, która nie jest całkowalna w sensie Riemanna, ale jest borelowska (borelowskość tej funkcji należy wykazać).
- Pokaż, że jeżeli $f = g$ prawie wszędzie, to
$$\int f \; d\lambda = \int g \; d\lambda,$$
o ile te całki istnieją. Pokaż, że niekoniecznie zachodzi odwrotna implikacja.

2. Na zbiorze ciągów zerojedynkowych $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ określamy metrykę wzorem
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } x = y \\ \frac{1}{2^n} & \text{jeśli } x \neq y \text{ i } n = \min\{k\colon x(k) \neq y(k)\} \end{cases}$$

1. Pokaż, że zbiór tych ciągów, które przyjmują jedynkę dokładnie raz nie jest domknięty.
2. Pokaz, że zbiór tych ciągów, które przyjmują jedynkę dokładnie raz nie jest otwarty.
3. Pokaż, że przestrzeń $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest zwarta.

3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Powiemy, że $x \in X$ jest *punktem izolowanym*, jeżeli $\{x\}$ jest zbiorem otwartym.

- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, w której wszystki punkty są izolowane (lub pokaż, że taka nie istnieje).
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty izolowane.
- Podaj przykład nieskończonej przestrzeni, która ma dokładnie dwa punkty, które nie są izolowane.
- Pokaż, że jeżeli (X, d) ma dokładnie dwa punkty izolowane, a (Y, d') jest homeomorficzna z (X, d), to (Y, d') też ma dokładnie dwa punkty izolowane.

4. Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}$. O zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ powiemy, że jest typu G_δ, jeżeli jest przeliczalnym przekrojem zbiorów otwartych.

- Czy każdy zbiór otwarty na $\mathbb{R}$ jest sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy $[2, 3)$ jest sumą przedziałów otwartych o końcach wymiernych? Odpowiedź uzasadnij.
- Pokaż, że dla każdego zbioru borelowskiego $E \subseteq \mathbb{R}$ istnieje $A \subseteq \mathbb{R}$ taki, że
  - $E \subseteq A$,
  - $\lambda(A) = \lambda(E)$,
  - A jest typu G_δ.

2 Arytmetyka

Wymagane pojęcia, fakty:

układy pozycyjne, rozwinięcia dziesiętne, ułamki łańcuchowe, liczby pierwsze, kongruencje, podzielność liczb, równania diofantyczne, małe twierdzenie Fermata, twierdzenie Eulera o liczbach względnie pierwszych.

Przykładowe zadania

1. Czy prawdą jest że $7^{1003} \equiv 5 \pmod{27}$?
2. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $2x + 7y = 10$ w liczbach całkowitych.
3. Ile dzielników naturalnych ma liczba $3^{13} \cdot 5^{17} \cdot 7^{19}$?
4. Ile jest ułamków nieskracalnych postaci $\frac{n}{1000}$, gdzie $1 \leqslant n < 1000$?
5. Uzasadnić niewymierność liczby

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \dots}}}}.$$

Czy jest to liczba algebraiczna?

3 Wstęp do matematyki

Wymagane pojęcia, fakty:

Zbiory, podstawowe operacje mnogościowe, relacje na zbiorze i ich własności: zwrotność, przechodniość, symetryczność, antysymetryczność, spójność. Relacja równoważności, klasy abstrakcji, porządek liniowy i częściowy, elementy minimalne, maksymalne, element najmniejszy, największy. Mnogościowe własności funkcji, np. przeciwobrazy, różnowartościowość, funkcja odwrotna.

Przykładowe zadania

1. Podaj przykład zbioru częściowo uporządkowanego, w którym jest tylko jeden element maksymalny, ale w którym nie ma elementu największego.

2. Sprawdź czy relacja podzielności:

$$a|b \iff \exists_{k\in\mathbb{N}} b = a \cdot k,$$

na zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ jest porządkiem częściowym. W zbiorze $A := \{1, 2, \ldots, 24\}$ znajdź wszystkie elementy minimalne i maksymalne. Czy w A jest element najmniejszy? A największy?

3. Niech P oznacza zbiór liczb naturalnych większych lub równych 2 i niech $\varphi : P \to P$ będzie funkcją określoną w następujący sposób: dla dowolnego $n \in P$, $\varphi(n)$ jest najmniejszym dzielnikiem pierwszym liczby n.

(a) Rozstrzygnij, czy funkcja φ jest różnowartościowa.

(b) Opisz zbiory $\varphi^{-1}(3)$ oraz $\varphi^{-1}(4)$, wraz z uzasadnieniem.

(c) Rozstrzygnij, wraz z uzasadnieniem, czy funkcja φ jest ograniczona.

4. Niech x_n będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Zapisz przy użyciu symboli logicznych, ale bez użycia symbolu negacji, następującą własność: „ciąg x_n nie jest ciągiem Cauchy'ego".

5. Sprawdź czy następująca relacja jest relacją równoważności na zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$:

$$xRy \iff x + y \text{ jest podzielne przez 3.}$$

Jeśli tak to opisz klasy abstrakcji.

6. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równość $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap B$? Odpowiedź uzasadnij.

7. Dane są zbiory A i B oraz funkcja $\pi : A \times B \to A$ określona wzorem $\pi(a, b) = a$. Niech $X, Y \subset A \times B$ będą dowolnymi podzbiorami. Czy z tego, że $\pi[X] \subset \pi[Y]$ wynika, że $X \subset Y$? Odpowiedź uzasadnij.

8. Mamy dany nieskończony ciąg $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$, przy czym jest spełniony następujący warunek:

$$\forall_{n\geqslant 1}\exists_{x\in A_{n+1}} : x \notin A_n.$$

1. Czy stąd wynika, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$?

2. Czy stąd wynika, że zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ jest nieskończony?

Odpowiedzi uzasadnij.

4 Geometria (*Geometria elementarna, Podstawy geometrii, Konstrukcje geometryczne*)

Wymagane pojęcia, fakty:

miejsce geometryczne w układzie współrzędnych, klasyfikacja i własności izometrii płaszczyzny, przekształcenia geometryczne w układzie współrzędnych, pola powierzchni i objętości brył obrotowych i wielościanów, wielościany platońskie i archimedesowe, wzór Eulera, metoda algebraiczna w konstrukcjach cyrklem i linijką, liczby konstruowalne, elementarne pojęcia i obiekty geometryczne na płaszczyźnie nieeuklidesowej - w modelach Kleina i półpłaszczyznowym

Przykładowe zadania

1. Figura F na płaszczyźnie jest sumą kwadratu o boku 2 i koła o promieniu 1 i o środku w jednym z wierzchołków tego kwadratu. Oblicz pole powierzchni i objętość bryły obrotowej utworzonej przez obracanie figury F wokół jej osi symetrii.
2. Dany jest ośmiościan platoński o krawędziach długości a. Znajdź średnicę tego ośmiościanu, tzn odległość pomiędzy dowolnymi dwoma niesąsiednimi (tzn. nie sąsiadującymi przez krawędź) wierzchołkami tego ośmiościanu.
3. W dowolnym modelu geometrii nieeuklidesowej skonstruuj i dokładnie opisz przykład czworokąta mającego trzy kąty proste i jeden kąt ostry. Uzasadnij poprawność swojego przykładu.
4. Uzasadnij (korzystając ze wzoru Eulera), że nie istnieje wielościan wypukły, którego **każda** ściana jest siedmiokątem.
5. Zakładając, że dane są odcinki o długościach a, b i c oraz odcinek jednostkowy, podać konstrukcję odcinka o długości $\frac{ab}{c} + \sqrt{bc+1}$.
6. Uzasadnij, że dla dowolnego danego trójkąta wykonalna jest konstrukcja cyrklem i linijką konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego trójkąta.
7. Niech dany będzie okrąg Σ oraz punkt A leżący wewnątrz tego okręgu. Znaleźć miejsce geometryczne punktów X takich, że odległość AX jest równa odległości punktu X od danego okręgu (podać również rozwiązanie analityczne.)
8. W pewnej izometrii płaszczyzny obrazem punktu $A = (1, 2)$ jest punkt $A' = (5, 8)$, punktu $B = (3, 0)$ - punkt $B' = (3, 10)$, a punktu $C = (0, 0)$ - punkt $C' = (6, 10)$.

1. Przedstawić tę izometrię jako złożenie symetrii osiowych.
2. Podać opis tej izometrii jako przekształcenia w zbiorze liczb zespolonych.
3. Rozpoznać jaki to rodzaj izometrii (obrót, translacja, odbicie czy symetria z poślizgiem) i wyznaczyć jej odpowiednie parametry (środek i kąt, oś, wektor, itp).