1. Czy jest prawdą, że

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ (x > y \Rightarrow x > y^2)$;

b) $\forall_{y\in\mathbb{R}}\exists_{x\in\mathbb{R}}\ (x > y \Rightarrow x > y^2)$;

c) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}}\ (x > y \Rightarrow x > y^2)$;

d) $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}}\ (x > y \Rightarrow x > y^2)$?

2. Czy jest prawdziwa nierówność

a) $\ln 10000 < 15$;

b) $\ln 10000 > 8$;

c) $\ln 1000 < 9$;

d) $\ln 100 > 4$?

3. O ciągach dodatnich liczb rzeczywistych (x_n), (y_n) wiadomo, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, zaś (y_n) jest ograniczony. Czy wynika stąd, że

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty$;

b) $x_n > y_n$ dla dostatecznie dużych n;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n - x_n = -\infty$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$?

4. Czy suma szeregu jest dodatnia?

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}\right)^3$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{10^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n$

5. Czy jest prawdą, że

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$;

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x} = 2$;

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^2} = -1$?

6. Niech $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ Czy pochodna funkcji f zeruje się w

a) $x = 4$;

b) $x = 3$;

c) $x = 1$;

d) $x = 2$?

7. Niech $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+\frac{t}{x}} dt$. Czy jest prawdą, że

a) $f(3) > 3$;

b) $f(4) < 2$;

c) $f(6) > 3$;

d) $f(5) < 5$?

8. Funkcja f zadana jest wzorem $f(x,y) = x^2 + axy + 2y^2$. Czy minimum funkcji f na zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ jest osiągane na brzegu tego zbioru, jeśli

a) $a = 3$;

b) $a = 2$;

c) $a = 1$;

d) $a = 0$?

9. Część rzeczywista liczby zespolonej z jest równa 2. Czy wynika stąd, że

a) $\operatorname{Re} z^2 \geq -4$;

b) $|z^2| \geq 4$;

c) $\operatorname{Re} z^2 \leq 4$;

d) z^2 nie jest liczbą rzeczywistą ujemną?

10. O liczbie zespolonej z wiadomo, że $z^{2009} = 1$ Czy jest możliwe, że

a) $|z + 1| \geq 2$;

b) $\operatorname{Im} z < -\frac{1}{2}$;

c) $|z - i| < 1$;

d) $|z - 2| \geq 3$?

11. Kolumny pewnej rzeczywistej macierzy A rozmiaru 3×3 są wektorami długości 1. Czy wynika stąd, że

a) $\operatorname{tr} A = 3$;

b) $\det A < 2$;

c) $\operatorname{tr} A > -3$;

d) $\det A = 1$?

12. Czy istnieje baza $\mathbb{R}^2$ złożona z dwóch prostopadłych wektorów własnych macierzy

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

13. Czy podany wektor jest wektorem własnym macierzy $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

a) $(1, 2, 1, 2)$;

b) $(0, 1, 1, 0)$;

c) $(2, 2, 1, 1)$;

d) $(1, 0, 0, 1)$.

14. Czy wektory v_1, v_2, v_3 muszą być liniowo zależne, jeśli wiadomo że

a) są parami prostopadłe ;

b) ich suma jest wektorem zerowym;

c) $v_2 = 0$;

d) $v_2 = v_3$?

15. Rozważmy grupę $\mathbb{Z}^2$ wektorów o obu współrzędnych całkowitych (z dodawaniem wektorów jako działaniem). Czy jest jej podgrupą zbiór wektorów, których

a) pierwsza współrzędna dzieli się przez 7;

b) co najwyżej jedna współrzędna dzieli się przez 7;

c) obie współrzędne dzielą się przez 7;

d) co najmniej jedna współrzędna dzieli się przez 7?

16. Niech $r(n)$ oznacza liczbę elementów rzędu n w grupie permutacji S_4. Czy

a) $r(2) > r(4)$;

b) $r(4) > r(3)$;

c) $r(1) + r(3) = r(2)$;

d) $r(5) = r(6)$?

17. Czy podana liczba jest elementem odwracalnym w pierścieniu liczb postaci $a+b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z}$?

a) $1 + \sqrt{3}$;

b) $7 + 4\sqrt{3}$;

c) $\sqrt{3}$;

d) $2 - \sqrt{3}$.

18. Niech $p(k)$ oznacza prawdopodobieństwo, że w trzech kolejnych rzutach kostką za każdym razem wypadło co najmniej k oczek. Czy jest prawdą, że

a) $p(5) > 0{,}04$;

b) $p(4) = \frac{1}{2}$;

c) $p(2) > \frac{1}{2}$;

d) $p(3) < \frac{1}{3}$?

19. Bolek wybiera losowo wierzchołek sześcianu o krawędzi długości 1 (każdy z tym samym prawdopodobieństwem); niezależnie od niego to samo robi Lolek (może się zdarzyć, że wybiorą ten sam wierzchołek).

a) Czy prawdopodobieństwo, że odległość wybranych wierzchołków wynosi $\sqrt{3}$ jest dodatnie;

b) Czy prawdopodobieństwo, że odległość wybranych wierzchołków wynosi $\sqrt{2}$ jest równe $\frac{3}{8}$;

c) Czy prawdopodobieństwo, że wybrane wierzchołki leżą na wspólnej krawędzi jest mniejsze niż $\frac{1}{2}$;

d) Czy prawdopodobieństwo, że wybrane wierzchołki leżą na wspólnej ścianie jest większe niż $\frac{3}{4}$?

20. W pewnej sakiewce co n-ta moneta jest fałszywa: ma z obu stron orła. Z sakiewki wylosowano 1 monetę i rzucono nią k razy; wypadły same orły. Niech $p(n,k)$ oznacza prawdopodobieństwo (warunkowe), że wylosowana moneta jest fałszywa. Czy

a) $p(2,1) > \frac{1}{2}$;

b) $p(9,3) = \frac{1}{2}$;

c) $p(6,2) = \frac{1}{2}$;

d) $p(3,2) = p(2,1)$?