W każdym zadaniu za 0, 1, 2, 3, 4 poprawne odpowiedzi otrzymuje się odpowiednio 0, 1, 3, 6, 10 punktów.

1. Niech $G(a,b)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)+(n+4)+\ldots+(n+2k)+\ldots+an}{1+2+3+\ldots+k+\ldots+bn}$.
Wtedy

a) $G(3,3)=$ ..... b) $G(5,2)=$ .....

c) $G(5,4)=$ ..... d) $G(7,4)=$ .....

2. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x)=e^{x^2}+e^{x^3}+e^{x^5}.$$

Podaj wartość pochodnej danego rzędu w zerze.

a) $f^{(75)}(0)=$ ..... b) $f^{(70)}(0)=$ .....

c) $f^{(66)}(0)=$ ..... d) $f^{(60)}(0)=$ .....

3. Podaj zbiór wszystkich wartości **rzeczywistych dodatnich** parametru p, dla których podana całka niewłaściwa jest zbieżna.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^5+x^3}{\sqrt{x^{2p}+x^p}}\,dx$, ... b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^4+x^2}{\sqrt{x^{2p}+x^p}}\,dx$, ...

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^7+x^5}{\sqrt{x^{2p}+x^p}}\,dx$, ... d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^6+x^4}{\sqrt{x^{2p}+x^p}}\,dx$, ...

4. Podaj wartość granicy.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{8n}\sqrt[3]{\dfrac{n^2}{k^5}}=$ ..... b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{32n}\sqrt[5]{\dfrac{n^2}{k^7}}=$ .....

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{8n}\sqrt[3]{\dfrac{n^4}{k^7}}=$ ..... d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{32n}\sqrt[5]{\dfrac{n^4}{k^9}}=$ .....

5. Podaj kres dolny zbioru.

a) $\inf\left\{x^4+y^4+32x+32y\colon x,y\in\mathbb{R}\right\}=$ .....

b) $\inf\left\{x^4+y^4+4x+32y\colon x,y\in\mathbb{R}\right\}=$ .....

c) $\inf\left\{x^4+y^4+32x\colon x,y\in\mathbb{R}\right\}=$ .....

d) $\inf\left\{x^4+y^4+4x+4y\colon x,y\in\mathbb{R}\right\}=$ .....

6. Podaj w uproszczonej postaci taką liczbę rzeczywistą dodatnią a, aby liczba zespolona z podanej postaci spełniała równanie $z^3\cdot\overline{z}^3=5^9$.

a) $z=5+ai,\quad a=$ ..... b) $z=2+ai,\quad a=$ .....

c) $z=11+ai,\quad a=$ ..... d) $z=10+ai,\quad a=$ .....

7. Niech $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Dla danego k podaj sumę wyrazów na przekątnej macierzy A^k.

a) $k=2$, ... b) $k=3$, ...

c) $k=4$, ... d) $k=5$, ...

8. Dla podanej jednej z liczb a, b i c wskaż pozostałe liczby tak, aby wektor (a, b, c) był prostopadły do wektorów $(3, 2, 1)$ i $(9, 4, 1)$.

a) $a=4$, $b=$ ....., $c=$ ..... b) $a=$ ....., $b=$ ....., $c=3$

c) $a=$ ....., $b=2$, $c=$ ..... d) $a=1$, $b=$ ....., $c=$ .....

9. Niech $C(k)$ będzie liczbą ideałów w pierścieniu $\mathbb{Z}$ zawierających liczbę 24^k. Wówczas

a) $C(2)=$ ..... b) $C(1)=$ .....

c) $C(4)=$ ..... d) $C(3)=$ .....

10. Zbiorem elementów grupy jest przedział $(-3, \infty)$, a działanie grupowe "$\circ$" jest określone wzorem $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$. Dla podanego elementu g tej grupy podaj element do niego odwrotny.

a) $g=3$, $g^{-1}=$ ..... b) $g=0$, $g^{-1}=$ .....

c) $g=1$, $g^{-1}=$ ..... d) $g=2$, $g^{-1}=$ .....

11. Rzucamy n-ścienną kostką do gry (mającą na ścianach kolejne liczby oczek od 1 do n, przy czym każdy wynik wypada z prawdopodobieństwem $1/n$). Jeżeli wypadło $n/2$ oczek lub mniej, unieważniamy pierwszy rzut i rzucamy po raz drugi – w tym wypadku wynik drugiego rzutu jest ostateczny. Niech $E(n)$ będzie wartością oczekiwaną liczby oczek, jaka widnieje na kostce. Podaj w postaci liczby naturalnej lub ułamka nieskracalnego:

a) $E(12) =$ ..... b) $E(14) =$ .....

c) $E(16) =$ ..... d) $E(20) =$ .....

12. Zdarzenia losowe A, B i C są niezależne. Dla podanych prawdopodobieństw $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$ i $P(B\cap C)$ podaj $P(A\cap B\cap C)$, o ile istnieją niezależne zdarzenia A, B i C spełniające podane warunki. Wpisz **NIE**, jeśli takie zdarzenia nie istnieją.

a) $P(A\cap B)=1/7$, $P(A\cap C)=4/7$, $P(B\cap C)=1/12$,
$P(A\cap B\cap C) =$ .....

b) $P(A\cap B)=2/7$, $P(A\cap C)=2/7$, $P(B\cap C)=1/12$,
$P(A\cap B\cap C) =$ .....

c) $P(A\cap B)=4/7$, $P(A\cap C)=4/7$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cap B\cap C) =$ .....

d) $P(A\cap B)=3/7$, $P(A\cap C)=3/7$, $P(B\cap C)=1/4$,
$P(A\cap B\cap C) =$ .....