Wrocław, 24 czerwca 2021r.

.

Test kwalifikacyjny do Kolegium Doktorskiego Matematyki Szkoły Doktorskiej Uniwersytetu Wrocławskiego

Zadanie 1. Przez D oznaczymy zbiór liczb *diadycznie wymiernych*, tzn. tych liczb wymiernych, które są postaci $\frac{k}{2^n}$ dla $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) (3 pkt.) Pokaż, że istnieje rosnąca bijekcja $f\colon \mathbb{Q} \cap (0,1) \to D \cap (0,1)$.

(b) (3 pkt.) Wykorzystując poprzedni podpunkt pokaż, że istnieje homeomorfizm $h\colon (0,1) \to (0,1)$ taki, że $h[\mathbb{Q} \cap (0,1)] = D \cap (0,1)$.

Zadanie 2. Określmy na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ relację

$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \exists n\, \forall m > n\ a_n \leq b_n.$$

oraz relację równoważnosci

$$(a_n) \sim (b_n) \iff ((a_n) \preceq (b_n) \wedge (b_n) \preceq (a_n)).$$

(a) (2 pkt.) Pokaż, że relacja na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ dana wzorem

$$[(a_n)]_{\sim} \leq [(b_n)]_{\sim} \iff (a_n) \preceq (b_n)$$

jest dobrze zdefiniowaną relacją częściowego porządku.

(b) (2 pkt.) Ile elementów mają klasy abstrakcji $\sim$? Uzasadnij odpowiedź.

(c) (2 pkt.) Udowodnij, że w $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}, \leq)$ żaden przeliczalny łańcuch nie jest maksymalny.

Zadanie 3. Niech G będzie grupą, $N \lhd G$ oraz $H \lhd N$.

(a) (3 pkt.) Udowodnić, że jeśli $|H| = 2$ oraz $[N : H] = 3$, to $H \lhd G$.

(b) (3 pkt.) Podać przykład (z uzasadnieniem!) H, N, G, takich że $|H| = 2$, $[N : H] = 2$ oraz H nie jest dzielnikiem normalnym G.

Zadanie 4. Dwa układy podprzestrzeni $(E_1, \ldots, E_m)$ oraz $(H_1, \ldots, H_m)$ w przestrzeni wektorowej V nazywamy *równoważnymi* gdy istnieje liniowy izomorfizm $f\colon V \to V$ taki, że $f(E_i) = H_i$ dla $i = 1, \ldots, m$.

(a) (2 pkt.) Uzasadnij, że każde dwie pary różnych 2-wymiarowych podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$ są równoważne.

(b) (4 pkt.) Znajdź i opisz, wraz z uzasadnieniem, wszystkie klasy równoważności trójek (E_1, E_2, E_3) parami różnych podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$ o wymiarach $\dim(E_1) = \dim(E_2) = 1$ oraz $\dim(E_3) = 2$.

Zadanie 5. W n-wymiarowej kostce $[-1, 1]^n$ znajduje się 2^n kul o środkach w punktach $(\pm\frac{1}{2}, \ldots, \pm\frac{1}{2})$ i o promieniach $r = \frac{1}{2}$. Dana jest również kula K o środku $(0, \ldots, 0)$ styczna zewnętrznie do tamtych kul.

(a) (2 pkt.) Wyznacz promień R kuli K.

(b) (4 pkt.) Zbadaj, w zależności od wymiaru $n \geq 2$, czy kula K zawiera się w kostce $[-1, 1]^n$. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. Niech $f_n, f \in L^p(\mathbb{R})$ dla pewnego $3 \leq p < \infty$. Załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, przy czym symbol $\|g\|_p$ oznacza normę $L^p(\mathbb{R})$ funkcji $g \in L^p(\mathbb{R})$.

(a) (2 pkt.) Pokaż, że $\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_p < \infty$.

(b) (2 pkt.) Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \|f_n^2 - f^2\|_{\frac{p}{2}} = 0$.

(c) (2 pkt.) Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \|f_n^3 - f^3\|_{\frac{p}{3}} = 0$.

*U*waga: Wszystkie przejścia należy uzasadnić.

Zadanie 7. Oznaczmy $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ i niech $f\colon D \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną spełniającą $f(z) = -f(-z)$.

(a) (3pkt.) Udowodnij, że istnieje jedyna funkcja holomorficzna $g\colon D \to \mathbb{C}$ taka, że

$$(f(z))^2 = g(z^2)$$

(b) (3pkt.) Uzasadnij, że jeśli f jest różnowartościowa to także g jest różnowartościowa.

*W*skazówka: Można skorzystać z szeregów potęgowych i postaci ich współczynników.

Zadanie 8. Rozważmy populację bakterii na powierzchni smartfona. Załóżmy, że w chwili $t = 0$ na smartfonie żyje $I(0) = I_0 > 0$ bakterii. Załóżmy, że smartfon jest izolowany od otoczenia i może maksymalnie pomieścić $M > I_0$ bakterii. Niech $\rho > 0$ będzie stałą wzrostu populacji bakterii. Wówczas ilość bakterii w chwili czasu $I(t)$ spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{dI}{dt} = \rho I(t)\big(1 - M^{-1}I(t)\big), \qquad t > 0.$$

Wiadomo, że równanie ma jednoznaczne rozwiązanie klasy $C^1([0,\infty))$.

(a) (2 pkt.) Bez rozwiązywania równania uzasadnij, że ilość bakterii $I(t)$ nie przekracza M.

(b) (2 pkt.) Pokaż, że $I(t)$ jest funkcją niemalejącą na $[0,\infty)$.

(c) (2 pkt.) Wyznacz $\lim_{t\to\infty} I(t)$.

Uwaga: W punktach b) i c) można rozwiązać równanie.

Zadanie 9. Dla $t > 0$ zdefiniujmy $\theta_t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\theta_t(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi t(k-x)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) (2 pkt.) Uzasadnij, że dla każdego $t > 0$ funkcja θ_t jest dobrze określona, parzysta i okresowa o okresie 1.

(b) (2 pkt.) Udowodnij nierówność

$$\theta_t(0) \le \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + 1\right), \qquad t > 0.$$

(c) (2 pkt.) Udowodnij nierówność

$$\theta_t(0) \ge \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right), \qquad 0 < t < 1,$$

i oblicz $\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t}\,\theta_t(0)$.

Wskazówka: W b) i c) może się przydać porównanie z odpowiednią całką i równość $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2}\,dy = 1$.

Zadanie 10. Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 > 0$, a zmienna losowa Y ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_2 > 0$ oraz, że X i Y są niezależne.

(a) (3 pkt.) Ile wynosi $E(X|X+Y=n)$ dla $n \ge 1$?

(b) (3 pkt.) Ile wynosi $Var(X|X+Y=n)$ dla $n \ge 1$?

Zadanie 11. Załóżmy, że X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 2, tzn. o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{dla} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{w p. p.} \end{cases}$$

(a) (3 pkt.) Jaka jest gęstość zmiennej losowej $R = X_1 + X_2$?

(b) (3 pkt.) Oznaczmy $S = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} X_i$. Ile wynosi $P(X_1 > S)$?

Zadanie 12. Niech $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ będzie prostą próbą losową z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, o średniej μ i wariancji σ^2.

(a) (2 pkt.) Zakładamy, że dla nieznanej wartości parametru θ, $\mu = \theta$ i $\sigma^2 = 2\theta$. Wyznacz estymator największej wiarogodności parametru θ.

(b) (2 pkt.) Załóżmy, że zamiast zanotować wartości wszystkich obserwacji w próbie pochodzącej z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, dla którego $\sigma^2 = 1$, zostało zanotowane jedynie czy obserwacja była mniejsza czy większa od zera. Na podstawie tak otrzymanych danych, wyznacz estymator największej wiarogodności parametru μ.

Uwaga. *Postać estymatora dla μ możesz wyrazić w terminach dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.*

(c) (2 pkt.) Czy wyznaczony w punkcie (b) estymator parametru μ jest zgodny, gdy rozmiar próby n dąży do nieskonczoności? Uzasadnij swoją odpowiedź.