Funkcje analityczne R. Lista 2

Niech
$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

(Można też używać skrótów: $\frac{\partial}{\partial z} f = \partial_z f = f_z$, $\frac{\partial}{\partial \bar z} f = \partial_{\bar z} f = f_{\bar z}$.)

1. Sprawdź, że operacje ∂_z i $\partial_{\bar z}$ są liniowe i spełniają regułę Leibniza.
2. Sprawdź, że $\partial_z z = 1$, $\partial_{\bar z} z = 0$, $\partial_z \bar z = 0$, $\partial_{\bar z} \bar z = 1$.
3. Sprawdź, że warunek $\partial_{\bar z} f = 0$ jest równoważny równaniom Cauchy'ego–Riemanna.
4. Pokaż, że dla funkcji holomorficznej f zachodzi $\partial_z f = f'$.
5. Sprawdź wzór $4\,\partial_{\bar z}\partial_z = 4\,\partial_z\partial_{\bar z} = \Delta$.
6. Oblicz $\partial_z^n \partial_{\bar z}^k (z^a \bar z^b)$ (dla $a, b, n, k \in \mathbf{N}$).
7. Niech $P(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$ będzie wielomianem dwóch zmiennych o współczynnikach zespolonych. Uzasadnij, że istnieje jedyny wielomian $Q(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$, taki że $P(x,y) = Q(z,\bar z)$ (gdzie $z = x + iy$). Znajdź go dla $P(X,Y) = X^2Y - XY^2 + 2iXY$.
8. Niech $Q(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$. Uzasadnij, że $Q(X,Y) \in \mathbf{C}[X] \iff \partial_{\bar z} Q(z,\bar z) = 0$.
9. Rozstrzygnij, który z podanych wielomianów daje się wyrazić jako wielomian zmiennej $z (= x + iy)$:
$$1 + x + 2x^2 - 2y^2 + i(y + 4xy), \qquad 1 + x + 2x^2 - 2y^2 + i(y - 4xy).$$
10. Oblicz $\int_{\partial B(0,R)} z^n dz$ dla $n \in \mathbf{Z}$.
11. Oblicz $\int_\Gamma (\bar z + z^2 \bar z) dz$, gdzie Γ to brzeg kwadratu o środku 0 i bokach długości 2 równoległych do osi.
12. Oblicz całki
$$\int_{|z+2|=1} (z + z^{-1}) dz, \qquad \int_{|z-1-i|=1} (z + z^{-1}) dz, \qquad \int_{[1,i]} (z + z^{-1}) dz.$$
13. Oblicz całki
$$\int_{[0,i]} z \sin z dz, \qquad \int_{[1,i,-1,-i,1]} z^{-1} dz.$$
14. Oblicz całki
$$\int_{x^2+4y^2=1} \frac{dz}{1+z^2}, \qquad \int_{|z-2-i|=\sqrt{2}} \frac{e^z \cos z dz}{(1+z^2)\sin z}.$$
15. Udowodnij, że $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \sqrt{2\pi}/4$. (Całki te należy rozumieć jako $\lim_{R\to\infty} \int_0^R$. Rozważ $\int_\Gamma e^{-z^2} dz$ dla $\Gamma = \partial\{z \in \mathbf{C} \mid 0 \le \arg z \le \pi/4, |z| < R\}$.)
16. Niech $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$. Oblicz całki
$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx)\, dx, \qquad \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx)\, dx$$
całkując funkcję e^{-Az} po brzegu odpowiedniego sektora o kącie rozwarcia $\arccos(a/A)$.
17. Pokaż, że nie istnieje ciąg wielomianów zmiennej z zbieżny jednostajnie do funkcji $1/z$ w pierścieniu $\{z \in \mathbf{C} \mid 1 \le |z| \le 2\}$ (Wsk. $\int_{|z|=3/2} \frac{dz}{z}$)