Funkcje analityczne R. Lista 3

1. Tw. Weierstrassa mówi, że ciągła funkcja na $[0,1]$ może być jednostajnie przybliżana wielomianami. Czy każda ciągła funkcja na domkniętym kole może być jednostajnie przybliżana wielomianami zmiennej z?
2. Niech $P(X,Y) \in \mathbf{C}[X,Y]$. Udowodnij, że funkcja $\mathbf{C} \ni x+iy \mapsto P(x,y) \in \mathbf{C}$ jest holomorficzna $\iff$ istnieje $Q(Z) \in \mathbf{C}[Z]$, taki że $P(x,y) = Q(x+iy)$ dla każdego $x+iy \in \mathbf{C}$.
3. Sprawdź, że funkcje $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ i $g(x,y) = \log(x^2+y^2)$ (określone na $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$) są harmoniczne (tzn. $\Delta f = \Delta g = 0$). Zbadaj, czy któraś z nich jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji $F \in \mathcal{O}(\mathbf{C} \setminus \{0\})$.
4. Uzasadnij, że jeśli $f = u + iv$ jest holomorficzna, to u i v są klasy C^2.
5. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathcal{O}(B(z_0,R))$ oraz $0 < r < R$, to
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt.$$
6. Dla krzywej $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ i ciągłej funkcji $f\colon \gamma^* \to \mathbf{C}$ określamy
$$\int_\gamma f(z)|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$
Zbadaj, czy ta całka jest zależna od parametryzacji γ. Uzasadnij, że $|\int_\gamma f(z)dz| \le \int_\gamma |f(z)||dz|$.

7 Oblicz $\int_{\partial B(z_0,r)} f(z)|dz|$ dla f holomorficznej w otoczeniu $\overline{B}(z_0,r)$.

8. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathcal{O}(B(z_0,R))$ oraz $0 < r < R$, to
$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|dt.$$
9. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$. Pokaż, że
   a) Jeśli f jest ograniczona, to jest stała.
   b) Jeśli f spełnia $|f(z)| \le 100|z|^k$ dla dostatecznie dużych $|z|$, to f jest wielomianem stopnia $\le k$.
   c) Jeśli $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, to $f \equiv 0$.
   d) Jeśli dla wszystkich z zachodzi $|f(z)| \le 1 + |z|^{3/2}$, to $f(z) = a + bz$ dla pewnych $a, b \in \mathbf{C}$.
10. Niech $f \in \mathcal{O}(B(0,1))$.
   a) Udowodnij, że $\operatorname{diam} f[B(0,1)] \ge |f'(0)|$.
   b)* Udowodnij, że $\operatorname{diam} f[B(0,1)] \ge 2|f'(0)|$.
11. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ma ciągłą pochodną. Użyj tw. Greene'a by pokazać, że $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$ dla każdego domkniętego trójkąta T zawartego w Ω.
12. Niech f bedzie funkcją ciągłą na obszarze Ω. Załóżmy, że dla wszystkich domkniętych trójkątów zawartych w Ω i o średnicy mniejszej niż $1/100$ zachodzi $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$. Uzasadnij, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.
13. Domknięty trójkąt T jest zawarty w obszarze Ω, w którym f jest holomorficzna. Udowodnij, że dla z z wnętrza T zachodzi $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial T} \frac{f(w)}{w-z}dw$.
14. Otwarty trójkąt T jest przekrojem trzech otwartych półpłaszczyzn Π_1, Π_2, Π_3, a $\varphi \in \mathcal{O}(T)$. Załóżmy, że istnieje rozszerzenie φ do funkcji $\Phi \in C(\overline{T})$. Czy można przedstawić φ w postaci sumy trzech funkcji – ograniczeń do T funkcji holomorficznych w półpłaszczyznach Π_1, Π_2, Π_3 ?
15. Niech Ω będzie otwartym podzbiorem $\mathbf{C}$. Załóżmy, że $F\colon \Omega \times [0,1] \to \mathbf{C}$ jest ciągła, i że dla każdego $s \in [0,1]$ funkcja $z \mapsto F(z,s)$ jest holomorficzna w Ω. Udowodnij, że funkcja $f(z) = \int_0^1 F(z,s)ds$ jest holomorficzna w Ω. [Wsk. Morera. Fubini.]