Funkcje analityczne R. Lista 4

Nierówności Cauchy'ego dla pochodnych.

Funkcja całkowita to funkcja z $\mathcal{O}(\mathbf{C})$.

1. Wyznacz wszystkie funkcje całkowite f spełniające $f'' + f = 0$, $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$.
2. Niech f będzie niestałą funkcją całkowitą. Połóżmy $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. Udowodnij, że $\lim\limits_{r\to+\infty} M(r) = +\infty$.
3. Jeśli f całkowita spełnia $|f(z)| > 1$ dla wszystkich z, to jest stała.
4. Jeśli f całkowita spełnia $\operatorname{Im} f(z) > 0$ dla wszystkich z, to jest stała.
5. Opisz wszystkie funkcje całkowite dla których $|f(z)|$ zależy tylko od $|z|$.
6. Niech $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Udowodnij, że istnieje stała $C > 0$, taka że dla wszystkich n całkowitych dodatnich zachodzi $|f^{(n)}(\pi)| < C \cdot n! \cdot 10^{-n/2}$.
7. Udowodnij, że jeśli funkcja holomorficzna f posyła koło $B(z_0, r)$ w pewne koło o promieniu s, to $|f'(z_0)| \leq s/r$.

Analityczna jednoznaczność.

8. Niech $f, g \in \mathcal{O}(B(0,1))$ będą niezerującymi się funkcjami. Załóżmy, że $\frac{f'}{f}(\frac{1}{n}) = \frac{g'}{g}(\frac{1}{n})$ dla $n = 2, 3, \ldots$. Udowodnij, że f/g jest stała.

Lemat Schwarza.

Biholomorfizm to bijekcja holomorficzna w obie strony.

9. Udowodnij, że każdy biholomorfizm $B(0,1)$ na siebie posyłający 0 w 0 jest dany wzorem postaci $z \mapsto e^{i\theta} z$ (dla pewnego $\theta \in \mathbf{R}$).
10. Udowodnij, że każdy biholomorfizm $B(0,1)$ na siebie jest dany wzorem postaci $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ (dla pewnych $\theta \in \mathbf{R}$, $a \in B(0,1)$).
11. Opisz wszystkie biholomorfizmy górnej półpłaszczyzny na siebie.
12. Czy istnieje holomorficzna w kole jednostkowym funkcja f, taka że $f(0) = 1/2$, $f(1/2) = 7/8$ i $|f(z)| < 1$ gdy $|z| < 1$?
13. Niech $f\colon B(0,1) \to B(0,1)$ będzie holomorficzna. Udowodnij, że $|f'(0)| \leq 1$ – nawet jeśli $f(0) \neq 0$.
14. Załóżmy, że holomorficzna $f\colon B(0,1) \to B(0,1)$ spełnia $f(0) = 0$, ale nie jest obrotem. Udowodnij, że dla każdego $z \in B(0,1)$ ciąg $(z, f(z), f(f(z)), f(f(f(z))), \ldots)$ jest zbieżny do 0.

Zasada maksimum.

15. Jeśli f jest ciągła w $\overline{B(0,1)}$, holomorficzna w $B(0,1)$ i rzeczywista na $\partial B(0,1)$, to jest stała.
16. Uzasadnij, że jeśli D jest domkniętym kołem, f funkcją holomorficzną na pewnym otwartym zbiorze zawierającym D, zaś a tym punktem D, w którym $|f|$ osiąga swe maksimum na D, to $f'(a) \neq 0$. Podaj przykład pokazujący, że jeśli D jest kwadratem to tak być nie musi.
17. Punkty $P_1, \ldots, P_n$ leżą na zewnątrz koła, ograniczonego okręgiem o środku w punkcie O. Udowodnij, że na tym okręgu istnieje punkt, dla którego iloczyn odległości do punktów $P_1, \ldots, P_n$ jest większy niż $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$, a także punkt, dla którego ten iloczyn jest mniejszy niż $OP_1 \cdot \ldots \cdot OP_n$.

Zasada odbicia Schwarza

18. Załóżmy, że f jest niezerującą się ciągłą funkcją na $\overline{B(0,1)}$, holomorficzną w $B(0,1)$. Ponadto załóżmy, że $|f(z)| = 1$ o ile $|z| = 1$. Udowodnij, że f jest stała. (Wsk. rozszerz f do $\mathbf{C}$ wzorem $f(z) = 1/\overline{f(\overline{z})}$.)

Krzywa na płaszczyźnie jest *rzeczywista analityczna,* jeśli w otoczeniu każdego swego punktu może być opisana jako wykres funkcji rzeczywistej analitycznej – funkcji rzeczywistej zadanej zbieżnym na pewnym przedziale szeregiem potęgowym.

19. Niech Ω_1 i Ω_2 będą ograniczonymi obszarami w $\mathbf{C}$, których brzegi są krzywymi rzeczywistymi analitycznymi. Załóżmy, że $f\colon \overline{\Omega}_1 \to \overline{\Omega}_2$ jest ciągła, holomorficzna w Ω_1, i przekształca brzeg Ω_1 w brzeg Ω_2.
    a) Udowodnij, że dla każdego $p \in \partial\Omega_1$ istnieją: $r > 0$ i holomorficzna $\phi\colon B(p,r) \to \mathbf{C}$, takie że na $\Omega_1 \cap B(p,r)$ funkcje f i ϕ są równe.
    b) Udowodnij, że istnieją: otwarty zbiór $U \subseteq \mathbf{C}$ zawierający $\overline{\Omega}_1$ i funkcja $\Phi \in \mathcal{O}(U)$, takie że obcięcie Φ do Ω_1 pokrywa się z f.