Funkcje analityczne R. Lista 5

Globalne twierdzenie Cauchy'ego

1. Oblicz całki:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz, \qquad \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}, \qquad \int_{|z-3|=3} \frac{zdz}{z^4-1}, \qquad \int_{|z+1/2|=1} \frac{dz}{z(1+z^2)}.$$

2. Niech $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{2, -2\}$. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ i że $\int_{\partial B(2,1)} f(z)dz = 7$, $\int_{\partial B(-2,1)} f(z)dz = 5$.
   a) Narysuj zamknięte krzywe γ, η w Ω, takie że $\int_\gamma f(z)dz = 1$, $\int_\eta f(z)dz = -3$.
   b) Jakie inne wartości całek f wzdłuż zamkniętych krzywych potrafisz uzyskać?
   c) Podaj przykład funkcji f spełniającej założenia zadania.
3. Dla $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ określmy $\mathrm{Per}(f) = \{\int_\gamma f(z)dz \mid \gamma \text{ jest krzywą zamkniętą w } \Omega\}$. Zbadaj, jakim zbiorem może być $\mathrm{Per}(f)$, a jakim jego domknięcie – dla następujących Ω:
   a) $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{0\}$;
   b) $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$;
   c) $\Omega = \mathbf{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
   W każdym przypadku zilustruj swoje tezy odpowiednimi przykładami funkcji f.
4. Oblicz

$$\int_{\partial B(0,2)} \frac{\sin(1/z)}{\pi z - 4} dz - \int_{\partial B(0,1)} \frac{\sin(1/z)}{\pi z - 4} dz.$$

5. Niech f będzie niezerującą się funkcją holomorficzną na obszarze Ω. Udowodnij że jeśli f ma analityczny k-ty pierwiastek dla nieskończenie wielu naturalnych k, to f ma analityczny logarytm.
6. Niech $0 < r < R$, i niech $\Omega_1 = \{x+iy \mid (|x| > r) \vee (|y| > r)\}$, $\Omega_2 = \{x+iy \mid |x|, |y| < R\}$. Udowodnij, że każdą funkcję $f \in \mathcal{O}(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ można przedstawić w postaci $f_1 + f_2$ dla pewnych $f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ spełniających $\lim_{z\to\infty} f_1(z) = 0$.

Formalną kombinację $c = k_1\gamma_1 + \ldots + k_n\gamma_n$ krzywych (niekoniecznie zamkniętych) $\gamma_j \colon [0,1] \to \Omega$ z całkowitymi współczynnikami nazywamy *łańcuchem singularnym* w Ω. Całkę po łańcuchu c określamy tak: $\int_c f(z)dz = \sum_{j=1}^n k_j \int_{\gamma_j} f(z)dz$. *Brzegiem* ∂c takiego łańcucha jest formalna kombinacja punktów: $\partial c = \sum_{j=1}^n k_j\gamma_j(1) - \sum_{j=0}^n k_j\gamma_j(0)$. Łańcuch c nazywamy *cyklem singularnym,* gdy ma zerowy brzeg: $\partial c = 0$. Niech też $c^* = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j^*$.

7. (Ω – otwarty w $\mathbf{C}$) Udowodnij, że dla dowolnego cyklu singularnego $c = \sum_{j=1}^n k_j\gamma_j$ istnieje cykl γ w sensie Asha (formalna kombinacja krzywych zamkniętych), taki że: (1) dla każdej ciągłej $f \colon \Omega \to \mathbf{C}$ zachodzi $\int_c f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$; oraz (2) $\gamma^* \subseteq c^*$. Uzasadnij ponadto, że dla dowolnych dwóch takich cykli Asha γ, γ' i dowolnego $z \notin c^*$ zachodzi $n(\gamma, z) = n(\gamma', z)$.
8. Używając pojęcia cyklu singularnego wytłumacz, jak można w rozumowaniu z książki Asha zastąpić "Hexagon Lemma" przez "Square Lemma".

Rozwinięcia Laurenta

9. Rozwiń w szereg Laurenta (w bezpośrednim otoczeniu wskazanych punktów):
   a) $\frac{1}{z-1}$ w $z = 0$ i $z = 1$;
   b) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w $z = 1$, $z = 2$ i $z = 0$;
   c) $e^{-z} + \sin(z)$ w $z = 0$;
   d) $z^7 e^{z^{-2}}$ w $z = 0$.
10. Rozwiń funkcję $\frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ w szeregi postaci $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Ile istnieje takich rozwinięć? Z jakim obszarem jest związanie każde z nich?
11. Na cześć Fibonacciego rozwiń $\frac{1}{z^2-z-1}$ w szereg Laurenta wokół 0.
12. Rozwiń $\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ w szeregi Laurenta w obszarach: $2 < |z| < 3$; $3 < |z|$.

Osobliwości

13. Udowodnij, że jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{p\})$
    a) jest ograniczona, to ma w p osobliwość pozorną;
    b) ma w p granicę ∞, to ma w p biegun.
14. Sklasyfikuj typy osobliwości podanych funkcji (uwzględniając ∞):

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}, \qquad \frac{z}{\sin z}, \qquad z\cos\frac{1}{z}, \qquad \exp(\mathrm{tg}\frac{1}{z}), \qquad \frac{z+1}{z^2-2i}, \qquad \exp\frac{z}{1-z},$$

15. Udowodnij, że
    a) funkcja holomorficzna w $\hat{\mathbf{C}}$ jest stała;
    b) funkcja całkowita, ktorej osobliwość w ∞ nie jest istotna, jest wielomianem;
    c) funkcja meromorficzna w $\hat{\mathbf{C}}$ jest wymierna;
16. Wykaż, że jeśli f ma w z biegun rzędu m, a P jest wielomianem stopnia n, to $P \circ f$ ma w z biegun rzędu mn.
17. Uzasadnij, że jeśli f jest holomorficzna w Ω, to $1/f$ jest meromorficzna w Ω (lub $f \equiv 0$).
18. Czy istnieje:
    a) funkcja $f \in \mathcal{O}(D'(0,1))$ spełniająca nierówność $|f(z)| > \exp(1/|z|)$?
    b) funkcja całkowita f spełniająca nierówność $|f(z)| > \exp(|z|)$?

19*. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(D'(0,1))$. Udowodnij, że jeśli $\int\int_{D'(0,1)} |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty$, to f ma w 0 osobliwość pozorną.