Funkcje analityczne R. Lista 6

1. Wyznacz residua funkcji

$$\frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)^2}, \qquad \frac{e^z}{z(z-1)}, \qquad \frac{e^{\pi z}}{1+z^2}, \qquad \frac{1}{\sin z}, \qquad \mathrm{ctg} z, \qquad \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}.$$

2. Oblicz całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}dz, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iz}}{z^2+1}dz, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iyx}}{x^2+1}dx \quad (y \in \mathbf{R}).$$

3. Oblicz całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+x^2+1}dx.$$

4. Dla $a > 0$ oblicz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx.$$

5. Dla $y \in \mathbf{R}$ udowodnij wzór

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy}}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2}(1+|y|)e^{-|y|}.$$

6. Oblicz (wsk. indented semi-circle):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\log x}{x^2+a^2}dx \quad (a > 0).$$

7. Niech $a > b > 0$
   a) Użyj podstawienia $z = e^{i\theta}$ by pokazać, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{iz(a+\frac{b}{2}(z+1/z))}.$$

   b) Wylicz wartość całki z a) (Odp. $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$).

8. Oblicz całki ($a > 1$)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n}d\theta.$$

9. Niech $K(N)$ będzie kwadratem $\{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq N + \frac{\pi}{2}\}$
   a) Udowodnij, że dla N całkowitego dodatniego

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K(N)} \frac{dz}{z^2 \sin z} = \frac{1}{6} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

   Wywnioskuj wzór $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.
   b) Udowodnij, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. W tym celu scałkuj $\frac{\mathrm{tg} z}{z^2}$ po brzegu $K(N+\frac{\pi}{2})$.

10. Niech funkcja g będzie holomorficzna w otoczeniu a i spełnia $g'(a) \neq 0$.
   a) Niech $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Uzasadnij, że $n(g \circ \gamma_r, g(a)) = 1$ dla dostatecznie małych r.
   b) Załóżmy, że funkcja holomorficzna f ma izolowaną osobliwość w $g(a)$. Udowodnij, że

$$\operatorname{Res}(f(z), g(a)) = \operatorname{Res}(f(g(z))g'(z), a).$$

c) Udowodnij, że jeśli f ma w $g(a)$ biegun prosty, to $f \circ g$ ma w a biegun prosty, oraz $\operatorname{Res}(f(g(z)), a) = \frac{1}{g'(a)} \operatorname{Res}(f(z), g(a))$.

11. Dla funkcji holomorficznej f z izolowaną osobliwością w ∞ definiujemy $\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -\operatorname{Res}(\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}), 0)$.
    a) Udowodnij, że $\int_{\partial D(0,R)} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \infty)$ (dla R dostatecznie dużych).
    b) Narysuj $\partial D(0, R)$ i ∞ na sferze Riemanna, a także w otoczeniu 0 we współrzędnej $w = 1/z$. Dlaczego znak minus w a) ma sens?
    c) Udowodnij, że jeśli $f \in \mathcal{O}(\hat{\mathbf{C}} \setminus S)$ dla skończonego S, to $\sum_{s \in S} \operatorname{Res}(f(z), s) = 0$.
    d) Oblicz residua w ∞ dla kilku funkcji z zadania 1.
    e) Niektórzy uważają, że residuum w s jest cechą wyrażenia (formy) $f(z)dz$, a nie funkcji $f(z)$ – i piszą $\operatorname{Res}_s(f(z)dz)$ zamiast $\operatorname{Res}(f(z), s)$. Przedyskutuj wady i zalety tego podejścia.
12. Oblicz $\operatorname{Res}(\sin(\operatorname{ctg}(z)), 0)$.
13. Uzasadnij, że odwzorowanie $f\colon \Omega \to \hat{\mathbf{C}}$ zadane przez funkcję meromorficzną na obszarze Ω jest otwarte.
14. Udowodnij, że wszystkie pierwiastki wielomianu $z^5 - z^4 + 3z^2 - 20z + 15$ leżą w $D(0, 10)$.
15. Znajdź liczbę pierwiastków wielomianu $z^4 + 6z + 3$: (a) w $D(0, 2)$; (b) w pierścieniu $A(1, 2)$.
16. Udowodnij, że równanie $e^z = 3z^7$ ma 7 rozwiązań w $D(0, 1)$.
17. Załóżmy, że $f \in \mathcal{O}(D(0, 2))$, $|f(z)| > 2$ dla $|z| = 1$, $f(0) = 1$. Czy f musi mieć zero w $D(0, 1)$?

Jądro Poissona

18. Udowodnij, że $P_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}$.
19. Załóżmy, że u jest ciągła funkcją na $\overline{D(a, R)}$ harmoniczną w $D(a, R)$.
    a) Udowodnij, że dla $r < R$ mamy
    $$u(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u(a + Re^{it}) dt.$$
    b) Uzasadnij, że
    $$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} \leq \frac{R + r}{R - r}.$$
    c) Załóżmy dodatkowo, że $u \geq 0$ (w każdym punkcie). Pokaż, że wtedy, dla każdego $r < R$, $\theta \in \mathbf{R}$, zachodzi
    $$\frac{R - r}{R + r} u(a) \leq u(a + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r} u(a).$$
20. Niech K będzie zwartym podzbiorem obszaru Ω, a u harmoniczną nieujemną funkcją określoną na Ω.
    a) Udowodnij, że dla każdych $z, w \in \Omega$ istnieje stała M (zależna od z, w, Ω, ale nie od u), taka że
    $$u(w) \leq Mu(z).$$
    b) Udowodnij, że dla każdego $z \in \Omega$ istnieją stałe m, M (zależne od z, K, Ω, ale nie od u), takie że
    $$\forall w \in K \qquad mu(z) \leq u(w) \leq Mu(z).$$
    c) Udowodnij, że istnieje stała M (zależna od K, Ω, ale nie od u), taka że
    $$\forall z, w \in K \qquad u(w) \leq Mu(z).$$
21. Załóżmy, że u jest dodatnią funkcją harmoniczną określoną na $D(0, 1)$ spełniającą $u(0) = 1$. Możliwie dokładnie oszacuj (z góry i z dołu) $u(1/2)$.
22. Czy funkcja u, ciągła na $\overline{D(0, 1)}$ i harmoniczna w $D(0, 1)$, spełniająca $u(e^{it}) = 0$ dla $t \in [0, \pi/2]$, musi być zerowa?