Funkcje Analityczne R. Lista 7

Wzór Jensena.

1. Niech $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ będzie ograniczona. Niech też $a_1, a_2, a_3, \ldots$ będą jej zerami (każde wymienione tyle razy, ile wynosi jego krotność). Udowodnij, że $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < \infty$.
2. Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\overline{D}(0,R) \subseteq \Omega$. Załóżmy, że $f(0) \neq 0$, oraz że f nie ma zer na brzegu dysku $D(0,R)$. Niech $n(r)$ oznacza liczbę zer f w $D(0,r)$ (z uwzględnieniem krotności). Uzasadnij następujący wariant wzoru Jensena:
$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{it})|dt - \log|f(0)|.$$

Mówimy, że $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ ma *rząd (wzrostu)* $\leq \rho$, jeśli dla pewnych dodatnich stałych A, B i wszystkich $z \in \mathbf{C}$:
$$|f(z)| \leq A\exp(B|z|^\rho).$$

Rząd funkcji f definiujemy jako infimum dodatnich liczb ρ spełniających powyższy warunek.

3. Niech (niezerowa) $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$ ma rząd $\leq \rho$. Udowodnij, że:
   a) dla pewnego $C > 0$ i dostatecznie dużych r zachodzi $n(r) \leq Cr^\rho$;
   b) jeśli $a_1, a_2, \ldots$ są zerami f (wszystkimi różnymi od 0, z uwzględnieniem krotności), a $s > \rho$, to $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{-s} < \infty$.
4. Zbadaj rząd funkcji: wielomianowej; wykładniczej; sinus; cosinus;
$$\exp(cz^n); \qquad \exp(e^z); \qquad \text{“}\cos\sqrt{z}\text{”} := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{(2n)!}.$$
5. Niech $g \in \mathcal{O}(\mathbf{C})$, $f(z) = e^{g(z)}\sin(z)$. Udowodnij, że istnieje dodatnia stała C, taka że $\sup_{|z|=R}|f(z)| \geq C\exp(2R/\pi)$.

Kontynuacja analityczna.

6. Niech $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ (dla $|z| < 1$).
   a) Udowodnij, że jeśli $w^{2^k} = 1$, to $\lim_{r\to 1^-}|F'(rw)| = \infty$.
   b) Wywnioskuj z a), że każde z o module 1 jest punktem osobliwym na brzegu koła zbieżności rozważanego szeregu.
7. Niech
$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z-z^2}{2}\right)^{3^k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$
   Udowodnij, że pierwszy z szeregów zbiega w obszarze zawierającym $D(0,1)\cup D(1,1)$, podczas gdy drugi z nich ma koło zbieżności $D(0,1)$. Pokaż, że jest to ilustracja zjawiska *nadzbieżności:* pewien ciąg sum częściowych drugiego szeregu zbiega (niemal jednostajnie) na obszarze istotnie większym niż koło zbieżności.
8. Uzasadnij, że uogólniona funkcja analityczna może mieć w danym punkcie najwyżej przeliczalnie wiele wartości.
9. Załóżmy, że pewna uogólniona funkcja analityczna Φ określona na Ω spełnia warunek: dla dowolnych dysków $D_0, D_1 \subseteq \Omega$ o niepustym przekroju i dla dowolnego elementu $(D_0, f_0) \in \Phi$ istnieje element $(D_1, f_1) \in \Phi$ będący bezpośrednią kontynuacją analityczną (D_0, f_0). Uzasadnij, że wtedy dowolny element funkcji Φ można przedłużać analitycznie wzdłuż każdej krzywej (zaczynającej się w jego dziedzinie i leżącej w Ω).
10. Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ nie ma zer w obszarze Ω. Niech n będzie całkowite dodatnie.
    a) (funkcja $\sqrt[n]{f(z)}$) Rozważmy rodzinę elementów (D, g) zadanych warunkami $D \subseteq \Omega$, $g^n = f$, $g \in \mathcal{O}(D)$. Uzasadnij, że ta rodzina spełnia warunek z poprzedniego zadania, ma zatem własność analitycznego przedłużania wzdłuż krzywych. Udowodnij, że jest ona sumą co najwyżej n uogólnionych funkcji analitycznych na Ω.

b) W sposób analogiczny jak w a) rozważ $\log f(z)$.

11. Niech Φ będzie uogólnioną funkcją analityczną na $\mathbf{C} \setminus \{-1, 1\}$ zadaną wyrażeniem $\sqrt{1-z^2}$.
    a) Sprawdź, że Φ jest jedną uogólnioną funkcją analityczną (a nie dwoma).
    b) Udowodnij, że po ograniczeniu do zbioru $\mathbf{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ funkcja uogólniona Φ rozpada się na dwie funkcje analityczne.
    c) Udowodnij, że po ograniczeniu do zbioru $\mathbf{C} \setminus [-1, 1]$ funkcja uogólniona Φ też rozpada się na dwie funkcje analityczne.
12. Sprawdź, że wyrażenie $\sqrt{(1-z^2)(4-z^2)}$ określa uogólnioną funkcję analityczną na $U = \mathbf{C} \setminus \{\pm 1, \pm 2\}$. Przedyskutuj kilka różnych wyborów możliwie dużych $\Omega \subseteq U$, po ograniczeniu do których ta funkcja uogólniona rozpada się na dwie funkcje analityczne. Poszukaj niejednospójnych przykładów takich Ω.
13. Niech F będzie niestałą funkcją analityczną na obszarze Ω, a f jej obcięciem do podobszaru $\omega = \{z \in \Omega \mid F'(z) \neq 0\}$.
    a) Zbuduj uogólnioną funkcję analityczną f^{-1} na obszarze $f[\omega]$.
    b) Wyznacz Ω, ω i $f[\omega]$ dla $F = \sin$ i dla $F = \mathrm{tg}$.
14. Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, Ω – obszar. Dla dowolnego $w_0 \in \Omega$, $D = D(w_0, r) \subseteq \Omega$ i dowolnej krzywej γ (w Ω) łączącej z_0 i w_0 określmy element analityczny (D, F) wzorem $F(w) = \int_\gamma f(z)dz + \int_{[w_0, w]} f(z)dz$. Uzasadnij, że określiliśmy w ten sposób uogólnioną funkcję analityczną na Ω (symbolicznie można by ją zapisać $F(w) = \int_{z_0}^{w} f(z)dz$). Udowodnij, że ta funkcja uogólniona ma własność przedłużania wzdłuż krzywych.
15. Uzasadnij, że funkcja uogólniona $\int_0^w \frac{dz}{1+z^2}$ określona jak w zadaniu poprzednim pokrywa się z funkcją arctg zbudowaną w zadaniu przedpoprzednim.

16.* Czy poprzednie zadanie ma swoją wersję dla arcsin?

17. Załóżmy, że elementy analityczne (D, f) i (D, g) mają swoje kontynuacje analityczne wzdluż krzywej γ do elementów analitycznych (D^*, f^*), (D^*, g^*). Załóżmy też, że $P(x, y)$ jest zespolonym wielomianem dwóch zmiennych, takim że $P(f(z), g(z)) = 0$ dla wszystkich $z \in D$. Uzasadnij, że $P(f^*(z), g^*(z)) = 0$ dla $z \in D^*$. Uogólnij.
18. Niech $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus S)$, gdzie Ω jest obszarem jednospójnym, zaś S skończonym jego podzbiorem. Uogólnioną funkcję analityczną F w $\Omega \setminus S$ definiujemy jak w zadaniu 14 ($F(w) = \int_{z_0}^{w} f(z)dz$, dla pewnego $z_0 \in \Omega \setminus S$). Udowodnij, że jeżeli $\int_{\partial D(s,\epsilon)} f(z)dz = 0$ dla wszystkich $s \in S$ i dostatecznie małych dodatnich ϵ, to F jest (jednowartościową) funkcją analityczną w $\Omega \setminus S$.