1. Zbiory domknięte, otwarte, ograniczone, zwarte. Domknięcie, wnętrze, brzeg.

Oznaczenia, definicje, twierdzonka.

Wszystkie rozważania prowadzone są w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$. Dla punktu $x \in \mathbb{R}^m$ przyjmujemy

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) .$$

Ponadto $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$.

Odległość euklidesowa:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2+\ldots+(x_m-y_m)^2} .$$

$$\|x\| = d(x,\mathbf{0}) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2} .$$

Nierówność trójkąta:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\| .$$

$$d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z) .$$

Kula (otwarta) o środku x i promieniu r:

$$K(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^m ; d(x,y) < r\} .$$

Zbieżność ciągu (x_n) punktów przestrzeni $\mathbb{R}^m$ do punktu granicznego $g \in \mathbb{R}^m$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \;\Leftrightarrow\; d(x_n,g) \to 0 .$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = g \;\Leftrightarrow\; (x_{n1} \to g_1 \wedge x_{n2} \to g_2 \wedge \ldots \wedge x_{nm} \to g_m) .$$

Zbiór domknięty:

Zbiór Z jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego ciągu zbieżnego (x_n) punktów zbioru Z

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in Z .$$

Zbiór Z jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}^m$ warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{y\in Z}{\exists} d(x,y) < \varepsilon$$

pociąga $x \in Z$.

Przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Suma dowolnej skończonej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Zbiór otwarty:

Zbiór Z jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x\in Z}{\forall} \underset{\varepsilon>0}{\exists} K(x,\varepsilon) \subset Z \,.$$

Zbiór Z jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x \in \mathbb{R}^m$ warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{y\notin Z}{\exists} d(x,y) < \varepsilon$$

pociąga $x \notin Z$.

Zbiór Z jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\mathbb{R}^m \setminus Z$ jest domknięty.

Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Przekrój dowolnej skończonej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Zbiór ograniczony:

Zbiór Z jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{M}{\exists} \underset{x\in Z}{\forall} \|x\| < M \,.$$

Zbiór zwarty:

Podzbiór Z przestrzeni euklidesowej jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

Uwaga: Pojęcie zbioru zwartego występuje także w ogólnych przestrzeniach metrycznych i topologicznych, gdzie powyższa charakteryzacja nie jest prawdziwa.

Twierdzenie (Bolzano-Weierstarssa):
Z każdego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny.

Z każdego ciągu o wyrazach ze zbioru zwartego Z można wybrać podciąg zbieżny do granicy należącej do zbioru Z.

Domknięcie zbioru:

$$\overline{Z} = \mathrm{Cl}Z = \{x \in \mathbb{R}^m;\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{y\in Z}{\exists}\ d(x,y) < \varepsilon\}\,.$$

Dla dowolnego Z zbiór $\mathrm{Cl}Z$ jest domknięty.
Zbiór Z jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Cl}Z = Z$.

Wnętrze zbioru:

$$\mathrm{Int}Z = \{x \in \mathbb{R}^m;\ \underset{\varepsilon>0}{\exists}\ K(x,\varepsilon) \subset Z\}\,.$$

Dla dowolnego Z zbiór $\mathrm{Int}Z$ jest otwarty.
Zbiór Z jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Int}Z = Z$.

Brzeg zbioru:

$$\mathrm{Bd}Z = \mathrm{Cl}Z \setminus \mathrm{Int}Z = \{x \in \mathbb{R}^m;\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{y\in Z}{\exists}\ \underset{z\notin Z}{\exists}\ d(x,y) < \varepsilon \wedge d(x,z) < \varepsilon\}\,.$$

Dla dowolnego Z zbiór $\mathrm{Bd}Z$ jest domknięty.

Kwadrat sito:

$$KS = \{(a,b);\ a,b \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}\,.$$

Zadania.

Które z następujących podzbiorów płaszczyzny euklidesowej są domknięte? Otwarte? Ograniczone? Zwarte?

1. $\{(x,y); x^2+y^2 \leqslant 9\}$ **2.** $\{(x,y); x^2+y^2 \in \mathbb{N}\}$ **3.** $\{(x,y); y \leqslant x^2 < 4\}$
4. $\{(x,y); x \in \mathbb{N}, y \in Q\}$ **5.** $\{(x,y); |x^2+y^2-25| < 24\}$
6. $\{(x,y); \sin x \leqslant y \leqslant 2\}$ **7.** $\{(x,y); |x|+|y| = 4\}$

Następujące zadania dotyczą przestrzeni euklidesowych. Jeśli nie potrafisz przeprowadzić dowodu dla $\mathbb{R}^m$ zacznij od $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

8. Niech (x_n) będzie ciągiem punktów zbieżnym do x. Dowieść, że istnieje taki podciąg (x_{n_k}), że $\underset{k\in\mathbb{N}}{\forall}\, d(x_{n_k},x)<\frac{1}{2^k}$.

9. Dowieść, że przekrój 2 zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

10. Dowieść, że suma mnogościowa (unia) 2 zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

11. Dowieść, że przesunięcie zbioru domkniętego A o wektor v $\{x+v;\ x\in A\}$ jest zbiorem domkniętym.

12. Dowieść, że dwukrotne powiększenie zbioru domkniętego A $\{2\cdot x;\ x\in A\}$ jest zbiorem domkniętym.

13. Dowieść, że zbiór skończony jest domknięty i ograniczony.

14. Dowieść, że w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$ przekrój $A\cap B$ zbioru ograniczonego A i zbioru domkniętego B jest zbiorem ograniczonym.

15. Dowieść, że jeżeli A i B są ograniczonymi podzbiorami przestrzeni euklidesowej, to zbiór $A+B=\{a+b;\ a\in A,\ b\in B\}$ też jest ograniczony.

PRAWDA czy FAŁSZ? Czy dla dowolnych zbiorów A i B oraz punktu x na płaszczyźnie euklidesowej zachodzą podane zależności? Podać uzasadnienie prawdziwości lub kontrprzykład.

16. $\mathrm{Int}\mathrm{Bd}A=\emptyset$ **17.** $A\cup B=\emptyset\Rightarrow \mathrm{Cl}A\cup\mathrm{Cl}B=\emptyset$

18. $\mathrm{Bd}A=\emptyset\Rightarrow(A\in\{\emptyset,\mathbb{R}^2\})$ **19.** $\mathrm{Int}\mathrm{Int}A=\mathrm{Int}A$

20. $\mathrm{Bd}(A\cup B)\subset\mathrm{Bd}A\cup\mathrm{Bd}B$ **21.** $\mathrm{Bd}(A\cup B)\supset\mathrm{Bd}A\cup\mathrm{Bd}B$

22. $\mathrm{Bd}(A\cap B)\subset\mathrm{Bd}A\cap\mathrm{Bd}B$ **23.** $\mathrm{Bd}(A\cap B)\supset\mathrm{Bd}A\cap\mathrm{Bd}B$

24. $\mathrm{Int}A=\mathrm{Int}(A\cup\{x\})$ **25.** $\mathrm{Cl}A=\mathrm{Cl}(A\cup\{x\})$

26. $\mathrm{Bd}A=\mathrm{Bd}(A\cup\{x\})$ **27.** $\mathrm{Int}A\setminus\mathrm{Int}B=\mathrm{Int}(A\setminus B)$

28. $\mathrm{Cl}A\setminus\mathrm{Cl}B=\mathrm{Cl}(A\setminus B)$ **29.** $\mathrm{Bd}A\setminus\mathrm{Bd}B=\mathrm{Bd}(A\setminus B)$

30. $\mathrm{Int}A\div\mathrm{Int}B=\mathrm{Int}(A\div B)$ **31.** $\mathrm{Cl}A\div\mathrm{Cl}B=\mathrm{Cl}(A\div B)$

32. $\mathrm{Bd}A\div\mathrm{Bd}B=\mathrm{Bd}(A\div B)$ ($\div$ to różnica symetryczna)

33. $\mathrm{Int}A\cap\mathrm{Int}B=\mathrm{Int}(A\cap B)$ **34.** $\mathrm{Cl}A\cap\mathrm{Cl}B=\mathrm{Cl}(A\cap B)$

35. $\mathrm{Cl}A\cup\mathrm{Cl}B=\mathrm{Cl}(A\cup B)$

36. Podać przykład takiego ciągu zbiorów domkniętych

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots ,$$

że zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ nie jest domknięty.

37. Podać przykład takiego ciągu zbiorów otwartych

$$Z_1 \supset Z_2 \supset \ldots \supset Z_n \supset \ldots ,$$

że zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$ nie jest otwarty.

38. Dowieść, że zbiór Z jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{M}{\exists} \underset{x \in Z}{\forall} d(x,(1,2,\ldots,m)) < M .$$

2. Trochę algebry liniowej. Zbiór wypukły, otoczenie zbioru.

Oznaczenia, definicje, twierdzonka.

Iloczyn skalarny:

$$x \circ y = \langle x,y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m .$$

$$\langle x,x \rangle = \|x\|^2 .$$

Kombinacja liniowa:

Kombinacją liniową wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ nazywamy każdy wektor postaci

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n ,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Dla dowolnego zbioru $Z \subset \mathbb{R}^m$ zbiór wszystkich kombinacji liniowych skończonych układów elementów zbioru Z

$$\begin{aligned} \mathrm{Lin} Z = \ & \{a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n ;\ n \in \mathbb{N},\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m, \\ & a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

nazywamy podprzestrzenią liniową generowaną przez Z.

Kombinacja afiniczna:

Kombinacją afiniczną punktów $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^m$ nazywamy każdy punkt postaci

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\,,$$

gdzie $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$ oraz $a_1+a_2+\ldots+a_m=1$.

Dla dowolnego zbioru $Z \subset \mathbb{R}^m$ zbiór wszystkich kombinacji afinicznych skończonych układów elementów zbioru Z

$$\begin{aligned}\mathrm{Af}Z= \ &\{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n;\ n\in\mathbb{N},\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^m,\\ &a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R},\ a_1+a_2+\ldots+a_m=1\}\end{aligned}$$

nazywamy podprzestrzenią afiniczną generowaną przez Z.

Kombinacja wypukła:

Kombinacją wypukłą punktów $x_1,x_2,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^m$ nazywamy każdy punkt postaci

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\,,$$

gdzie $a_1,a_2,\ldots,a_n \in [0,1]$ oraz $a_1+a_2+\ldots+a_m=1$.

Dla dowolnego zbioru $Z \subset \mathbb{R}^m$ zbiór wszystkich kombinacji wypukłych skończonych układów elementów zbioru Z

$$\begin{aligned}\mathrm{Conv}Z= \ &\{a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n;\ n\in\mathbb{N},\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^m,\\ &a_1,a_2,\ldots,a_n\in[0,1],\ a_1+a_2+\ldots+a_m=1\}\end{aligned}$$

nazywamy uwypukleniem (lub otoczką wypukłą) zbioru Z.

Odcinek:

Uwypuklenie zbioru dwupunktowego $\{x,y\}$ nazywamy odcinkiem o końcach x i y:

$$[x,y]=\mathrm{Conv}\{x,y\}=\{ax+by;\ a,b\in[0,1],\ a+b=1\}\,.$$

Zbiór wypukły:

Zbiór Z jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek je łączący, tzn.

$$\underset{x,y\in Z}{\forall}[x,y]\subset Z\,.$$

Dla dowolnego zbioru Z zbiór $\mathrm{Conv}Z$ jest wypukły. Co więcej, jest to najmniejszy zbiór wypukły zawierający Z.

Zbiór Z jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy $Z=\mathrm{Conv}Z$.

Otoczenie zbioru:

Niech Z będzie dowolnym zbiorem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$, a ε dowolną liczbą dodatnią. Zbiór

$$O_\varepsilon(Z)=\{(x\in\mathbb{R}^m;\ \underset{z\in Z}{\exists}\, d(x,z)<\varepsilon\}$$

nazywamy ε-otoczeniem zbioru Z.

Przykład:

39. Dowieść, że przekrój dwóch zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym.

Rozwiązanie:

Niech A i B będą danymi zbiorami wypukłymi.

Niech x,y będą dowolnymi punktami należącymi do zbioru $A\cap B$. Wówczas $x,y\in A$ i z wypukłości zbioru A otrzymujemy $[x,y]\subset A$. Podobnie $x,y\in B$, co na mocy wypukłości zbioru B daje $[x,y]\subset B$.

Udowodniliśmy zatem, że $[x,y]\subset A\cap B$ dla dowolnych $x,y\in A\cap B$, skąd wynika, że zbiór $A\cap B$ jest wypukły..

Zadania.

Dla podanego zbioru Z wyznaczyć Lin$Z$, AfZ, Conv$Z$. Opisać słowami, jakimi figurami są otrzymane zbiory.

40. $Z=\{(1,0),(0,1)\}$

41. $Z=\{(1,2),(2,4)\}$

42. $Z=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

43. $Z=\{(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3),(1,1,1)\}$

44. $Z=\{(a,0,0);\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,0,1)\}$

45. $Z=\{(a,1,0);\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,0,1)\}$

46. $Z=\{(a,1,0);\ a\in\mathbb{R}\}\cup\{(1,2,0)\}$

47. Obliczyć $\|x+y+z\|$ wiedząc, że

$$\|x\|=\|y\|=\|z\|=1$$

oraz

$$\langle x,y\rangle=\langle y,z\rangle=\langle z,x\rangle=-1/2\,.$$

48. Dowieść, że każda kula jest zbiorem wypukłym.

49. Dowieść, że jeżeli zbiór Z jest wypukły, to jego domknięcie $\mathrm{Cl}Z$ też jest zbiorem wypukłym.

50. Dowieść, że jeżeli zbiór Z jest wypukły, to jego wnętrze $\mathrm{Int}Z$ też jest zbiorem wypukłym.

51. Dowieść, że dla dowolnego zbioru Z zbiór $O_\varepsilon(Z)$ jest otwarty.

52. Niech K będzie kwadratem o boku a na płaszczyźnie. Obliczyć pole figury $O_\varepsilon(K)$.

53. Korzystając z zadania poprzedniego rozwiązać następujące zadanie wstawiając w miejsce kropek możliwie dużą liczbę:
W prostokącie o polu 100 umieszczono .... kwadratów o boku 1. Dowieść, że w prostokącie tym można umieścić koło o promieniu 1 rozłączne ze wszystkimi kwadratami.

PRAWDA czy FAŁSZ? Y i Z oznaczają podzbiory $\mathbb{R}^m$.

54. Jeżeli Z jest takim zbiorem, że

$$K(\mathbf{0},1)\subset Z\subset \mathrm{Cl}K(\mathbf{0},1)\,,$$

to Z jest zbiorem wypukłym.

55. Jeżeli zbiór Z jest wypukły, to jego brzeg $\mathrm{Bd}Z$ też jest zbiorem wypukłym.

56. Jeżeli zbiór Z nie jest wypukły, to jego brzeg $\mathrm{Bd}Z$ też nie jest zbiorem wypukłym.

57. Jeżeli zbiór Z nie jest wypukły, to jego domknięcie $\mathrm{Cl}Z$ też nie jest zbiorem wypukłym.

58. Jeżeli zbiór Z nie jest wypukły, to jego wnętrze $\mathrm{Int}Z$ też nie jest zbiorem wypukłym.

59. Jeżeli $\varepsilon>0$ oraz $Y\subset Z$, to $O_\varepsilon(Y)\subset O_\varepsilon(Z)$.

60. Jeżeli $\varepsilon>0$ oraz $Y\neq Z$, to $O_\varepsilon(Y)\neq O_\varepsilon(Z)$.

61. Jeżeli $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$, to $O_{\varepsilon_1}(Z)\subset O_{\varepsilon_2}(Z)$.

Co to jest? Rozszyfruj, co reprezentują poniższe napisy.

62. $\bigcup\limits_{z\in Z} K(z,\varepsilon)$ **63.** $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} O_{1/n}(Z)$ **64.** $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} O_n(Z)$

65. $\underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{z\in Z}{\forall}\ d(y,z)>0$ **66.** $\underset{y\in Y}{\forall}\ \underset{z\in Z}{\exists}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ d(y,z)<\varepsilon$

3. O funkcjach ciągłych. I o zwartości konsekwencjach.

Oznaczenia, definicje, twierdzonka.

Ciągłość funkcji:

Niech $f: D_f \to \mathbb{R}$, gdzie $D_f \subset \mathbb{R}^m$.

Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) punktów należących do D_f zbieżnego do $y \in D$ zachodzi zbieżność

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(y)\,.$$

Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{x\in D_f}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{y\in D_f}{\forall} \left(d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\right)\,.$$

Warunek Lipschitza ze stałą C:

$$\underset{x\in D_f}{\forall}\ \underset{y\in D_f}{\forall} |f(x) - f(y)| \leqslant C \cdot d(x,y)\,.$$

Stała C musi być dodatnia.

Funkcję spełniającą warunek Lipschitza ze stałą 1 nazywamy kontrakcją.

Twierdzenie:

Funkcja ciągła określona na niepustym zbiorze zwartym osiąga wartość najmniejszą i wartość największą.

Zadania.

67. Dowieść, że każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest ciągła.

68. Niech z będzie ustalonym punktem przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^m$. Dowieść, zę funkcja f określona wzorem $f(x) = d(x,z)$ jest ciągła.

Wskazówka: Dowieść, że f jest kontrakcją.

69. Niech $Z \subset \mathbb{R}^m$ będzie niepustym zbiorem domkniętym, oraz niech $x \in \mathbb{R}^m$. Dowieść, że w zbiorze Z istnieje punkt najbliższy x, czyli taki punkt z, że

$$\underset{y\in Z}{\forall} d(x,z) \leqslant d(y,z)\,.$$

Czy taki punkt z musi być jedyny?

Liczbę $d(x,z)$ nazwiemy odległością punktu x od zbioru Z i będziemy oznaczać przez $d(x,Z)$ lub $d(Z,x)$.

70. Niech teraz dla ustalonego niepustego zbioru domkniętego Z, funkcja f będzie określona wzorem $f(x)=d(x,Z)$. Dowieść, że tak określona funkcja f jest ciągła.

71. Niech wreszcie Y i Z będą niepustymi zbiorami domkniętymi, przy czym zbiór Z jest ograniczony. Dowieść, że można poprawnie określić odległość $d(Y,Z)$ zbiorów Y i Z. W tym celu dowieść, że

$$\underset{y\in Y}{\exists}\ \underset{z\in Z}{\exists}\ \underset{s\in Y}{\forall}\ \underset{t\in Z}{\forall}\ d(y,z)\leqslant d(s,t)\,.$$

72. Niech Y i Z będą niepustymi zbiorami domkniętymi. Rozstrzygnąć, czy poniższy warunek musi być prawdziwy

$$\underset{y\in Y}{\exists}\ \underset{z\in Z}{\exists}\ \underset{s\in Y}{\forall}\ \underset{t\in Z}{\forall}\ d(y,z)\leqslant d(s,t)\,.$$

73. Niech x będzie punktem, Y i Z niepustymi zbiorami domkniętymi. Połączyć następujące warunki w pary warunków równoważnych:

i) $d(x,Z)=0$
ii) $d(Y,Z)=0$
iii) $d(x,Z)<1$
iv) $d(Y,Z)<2$
v) $K(x,2)\cap O_5(Z)\neq\emptyset$
vi) $Y\cap Z\neq\emptyset$
vii) $x\in Z$
viii) $K(x,4)\cap O_3(Z)\neq\emptyset$
ix) $O_1(Y)\cap O_1(Z)\neq\emptyset$
x) $x\in O_1(Z)$

4. Funkcje wypukłe jednej zmiennej. Nierówność Jensena.

Zastąpić ? odpowiednim znakiem nierówności i udowodnić podane nierówności przy podanych warunkach:

74. $x_i\in[0,\frac{1}{4}]\wedge\sum\limits_{i=1}^{81}x_i=9\Rightarrow\sum\limits_{i=1}^{81}(\sqrt{x_i}+x_i^2)\ ?\ 28$

75. $x_i \in [\frac{1}{4}, 1] \wedge \sum\limits_{i=1}^{81} x_i = 36 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{81} (\sqrt{x_i} + x_i^2)\ ?\ 70$

76. $x_i \geqslant 0 \wedge \sum\limits_{i=1}^{2000} x_i = 2000 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{2000} \mathrm{arctg} x_i\ ?\ 500\pi$

77. $a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\ ?\ \frac{9}{a+b+c}$

78. $a, b, c, d > 0 \wedge a+b+c+d = 2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}\ ?\ 16$

79. $a, b, c, d > 0 \wedge a+b+c+d = 1 \Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}\ ?\ 2$

80. $x_i \geqslant 0 \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2 + x_i + 1}\ ?\ \frac{n}{3}$

81. $x, y, z \geqslant 0 \wedge x+y+z = \pi \Rightarrow \sin x + \sin y + \sin z\ ?\ \frac{3\sqrt{3}}{2}$

82. $x, y, z \geqslant 0 \wedge x+y+z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x + \sin y + \sin z\ ?\ \frac{3}{2}$

83. $x, y, z, t \geqslant 0 \wedge x+y+z+t = 4 \Rightarrow \frac{e^x}{x} + \frac{e^y}{y} + \frac{e^z}{z} + \frac{e^t}{t}\ ?\ 4e$

84. $x, y, z \geqslant 0 \wedge \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{\sqrt{z}}{6}\ ?\ 1$

85. $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{3} + \frac{x_4^2}{4}\ ?\ \frac{12}{25}$

86. $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = n \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}\ ?\ ne$

87. $x_i < \frac{1}{2} \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i}\ ?\ n + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

88. $x_i > -\frac{1}{3} \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} e^{2x_i}\ ?\ n + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

89. $x_i \geqslant 1 \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 2n \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + x_i^2)\ ?\ 5^n$

90. $-1 \leqslant x_i \leqslant 1 \wedge \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{2} \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n} (1 + x_i^2)\ ?\ \frac{5^n}{4^n}$

Która z liczb jest większa

91. $995^{995} \cdot 996^{996} \cdot 997^{997} \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1000^{1000} \cdot 1001^{1001} \cdot$
$\cdot 1002^{1002} \cdot 1003^{1003} \cdot 1004^{1004} \cdot 1005^{1005}$ czy 10^{33000} ?

92. $995^{1005} \cdot 996^{1004} \cdot 997^{1003} \cdot 998^{1002} \cdot 999^{1001} \cdot 1000^{1000} \cdot 1001^{999} \cdot$
$\cdot 1002^{998} \cdot 1003^{997} \cdot 1004^{996} \cdot 1005^{995}$ czy 10^{33000} ?

93. $995^{995} + 996^{996} + 997^{997} + 998^{998} + 999^{999} + 1000^{1000} + 1001^{1001} +$
$+ 1002^{1002} + 1003^{1003} + 1004^{1004} + 1005^{1005}$ czy $11 \cdot 10^{3000}$?

94. $995^{1005} + 996^{1004} + 997^{1003} + 998^{1002} + 999^{1001} + 1000^{1000} + 1001^{999} +$

$+1002^{998}+1003^{997}+1004^{996}+1005^{995}$ czy $11\cdot 10^{3000}$?

95. $995^{2995}\cdot 996^{2996}\cdot 997^{2997}\cdot 998^{2998}\cdot 999^{2999}\cdot 1000^{3000}\cdot 1001^{3001}\cdot$
$\cdot 1002^{3002}\cdot 1003^{3003}\cdot 1004^{3004}\cdot 1005^{3005}$ czy 10^{99000} ?

96. Czy w zadaniu 89 można zastąpić $x_i \geqslant 1$ warunkiem $|x_i| \geqslant 1$?

97. Czy kwadrat funkcji wypukłej musi być funkcją wypukłą?

98. Czy kwadrat nieujemnej funkcji wypukłej musi być funkcją wypukłą?

99. Czy iloczyn dwóch dodatnich funkcji wypukłych musi być funkcją wypukłą?

100. Podać przykład funkcji ciągłej $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o następujących własnościach:

(i) funkcja f ma w każdym punkcie pochodną prawostronną i pochodną lewostronną,

(ii) funkcja f ma w każdym punkcie prawo- i lewostronną pochodną rzędu drugiego - przez prawostronną pochodną rzędu drugiego rozumiemy **na potrzeby tego zadania** prawostronną pochodną prawostronnej pochodnej rzędu pierwszego, analogicznie dla pochodnej lewostronnej,

(iii) w każdym punkcie pochodna prawostronna rzędu drugiego jest równa lewostronnej pochodnej rzędu drugiego i pochodne te są dodatnie,

(iv) funkcja f **nie** jest wypukła.

5. Zbiory wypukłe.

Jeśli nie założono inaczej, Z jest niepustym domkniętym zbiorem wypukłym.

Hiperpłaszczyzną nazywamy każdy zbiór postaci

$$\{x\in\mathbb{R}^m;\langle x,v\rangle=c\},$$

gdzie $v\in\mathbb{R}^m\setminus\{\mathbf{0}\}$ oraz $c\in\mathbb{R}$, czyli każdą podprzestrzeń afiniczną wymiaru $m-1$.

Hiperpłaszczyzną podpierającą w punkcie $y\in\mathrm{Bd}Z$ nazywamy każdą taką hiperpłaszczyznę przechodzącą przez y, że zbiór Z jest całkowicie zawarty w jednej z półprzestrzeni domkniętych, na które hiperpłaszczyzna dzieli $\mathbb{R}^m$.

Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^m$ istnieje jedyny punkt $P_Z(x) \in Z$ taki, że

$$\underset{z\in Z}{\forall}\, d(x, P_Z(x)) \leqslant d(x,z)\,.$$

Rzutowanie P_Z na zbiór Z ma następujące własności:
(i) $P_Z : \mathbb{R}^m \to Z$,
(ii) $\underset{x\in Z}{\forall}\, P_Z(x) = x$,
(iii) $\underset{x\in \mathbb{R}^m\setminus Z}{\forall}\, P_Z(x) \in \mathrm{Bd} Z$,
(iv) P_Z jest kontrakcją, a więc jest przekształceniem ciągłym,
(v) $\underset{x\in \mathbb{R}^m\setminus Z}{\forall}\ \underset{z\in Z}{\forall}\, \langle x - P_Z(x), z - P_Z(x)\rangle \leqslant 0$; oznacza to, że hiperpłaszczyzna prostopadła do odcinka $[x, P_Z(x)]$ w punkcie $P_Z(x)$ jest hiperpłaszczyzną podpierającą,
(vi) $\underset{x\in \mathbb{R}^m\setminus Z}{\forall}\ \underset{\lambda\in(0,+\infty)}{\forall}\, P_Z(P_Z(x) + \lambda(x - P_Z(x))) = P_Z(x)$; innymi słowy całe półproste są rzutowane na jeden punkt,
(vii) każdy punkt brzegowy zbioru Z jest rzutem pewnego punktu nienależącego do Z; równoważnie: w każdym punkcie brzegowym istnieje hiperpłaszczyzna podpierająca.

Niech x będzie punktem nienależącym do Z. Wtedy Z można oddzielić od x hiperpłaszczyzną.

Ogólniej: niech X będzie niepustym zwartym zbiorem wypukłym rozłącznym z Z. Wtedy X można **ściśle** oddzielić od Z hiperpłaszczyzną. Oznacza to, że zbiory X i Y leża po różnych stronach hiperpłaszczyzny rozdzielającej i są z nią rozłączne.

Jeżeli X i Y są niepustymi domkniętymi zbiorami wypukłymi, to można je rozdzielić hiperpłaszczyzną rozłączną z co najmniej jednym z tych zbiorów.

Punkt $z \in Z$ nazywamy punktem ekstremalnym, jeżeli zbiór $Z \setminus \{z\}$ jest wypukły.

Twierdzenie Kreina-Milmana: Wypukły zbiór zwarty jest uwypukleniem zbioru swoich punktów ekstremalnych.

Zadania

101. Niech $Z=\{(x_1,x_2);\ x_1^2+x_2^2\leqslant 9\wedge x_1,x_2\geqslant 0\}$. Wyznaczyć rzuty na zbiór Z punktów postaci $(a,a+5)$ dla $a\in[-7,2]\cap\mathbb{Z}$.

102. Dla $m>1$ podać równanie hiperpłaszczyzny oddzielającej kulę $K(\mathbf{0},1)$ od punktu $(1,2,\ldots,m)$.

Czym jest zbiór punktów ekstremalnych następującej wypukłej bryły zwartej w $\mathbb{R}^3$:

103. stożek **104.** walec **105.** kula

106. dwunastościan foremny **107.** stożek ścięty

108. półkula **109.** dwa stożki złączone podstawami

110. stożek i walec złączone podstawami

111. walec z dołączonymi do podstaw półkulami

112. Podać przykład takiego niepustego zbioru wypukłego Z i punktu $x\in\mathrm{Bd}Z$, że

(i) punkt x **nie** jest punktem ekstremalnym zbioru Z,

(ii) zbiór Z ma co najmniej dwie hiperpłaszczyzny podpierające w punkcie x.

113. Podać przykład takiego niepustego zbioru wypukłego Z i punktu $x\in\mathrm{Bd}Z$, że

(i) punkt x jest punktem ekstremalnym zbioru Z,

(ii) zbiór Z ma tylko jedną hiperpłaszczyznę podpierającą w punkcie x.

6. Funkcje wypukłe wielu zmiennych.

Definicja: Funkcję $f:D_f\to\mathbb{R}$, gdzie $D_f\subset\mathbb{R}^m$ jest niepustym zbiorem wypukłym, nazywamy wypułą, jeżeli

$$\underset{x,y\in D_f}{\forall}\ \underset{\lambda\in(0,1)}{\forall}\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\,.$$

Funkcję f nazywamy wklęsłą, jeżeli funkcja $-f$ jest wypukła.

Funkcja wypukła jest ciągła w każdym punkcie wewnętrznym swojej dziedziny.

114. Niech f będzie funkcją, której dziedziną jest niepusty zbiór wypukły. Dowieść, że następujące warunki są równoważne:

(i) f jest wypukła,

(ii) $\underset{x,y\in D_f}{\forall}\ \underset{\lambda\in[0,1]}{\forall}\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$,

(iii) f spełnia nierówność Jensena, czyli

$$\underset{n}{\forall}\ \underset{x_1,x_2,\ldots,x_n\in D_f}{\forall}\ \underset{\substack{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in[0,1]\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=1}}{\forall}\ f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\lambda_i x_i)\ ,$$

(iv) zbiór

$$\{(x,t);x\in D_f\wedge t\in[f(x),+\infty)\}$$

jest wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^{m+1}$.

115. Dowieść, że jeżeli funkcje f i g są wypukłe, a przekrój ich dziedzin jest niepusty, to funkcja $h(x)=\max(f(x),g(x))$ jest wypukła na $D_f\cup D_g$.

116. Dowieść, że jeżeli funkcja f jest wypukła, to dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$ zbiory

$$\{x\in D_f;f(x)<a\}\quad\text{oraz}\quad\{x\in D_f;f(x)\leqslant a\}$$

są wypukłe.

117. Dać przykład takiej funkcji $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, że dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$ zbiory

$$\{x\in D_f;f(x)<a\}\quad\text{oraz}\quad\{x\in D_f;f(x)\leqslant a\}$$

są wypukłe, ale f nie jest wypukła.

7. Funkcje dwukrotnie różniczkowalne.

Występujące poniżej macierze są symetryczne.

Macierz A o wymiarach $m\times m$ nazywamy dodatnio określoną, jeżeli dla dowolnego niezerowego wektora $v\in\mathbb{R}^m$ iloczyn skalarny $\langle Av,v\rangle$ jest dodatni.

Macierz A o wymiarach $m\times m$ nazywamy nieujemnie półokreśloną, jeżeli dla dowolnego wetora $v\in\mathbb{R}^m$ iloczyn skalarny $\langle Av,v\rangle$ jest nieujemny.

Niech A_k będzie macierzą powstałą z macierzy A przez wykrojenie macierzy o wymiarach $k\times k$ z lewego górnego rogu. Wówczas A jest macierzą dodatnio określoną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie macierze $A_1,A_2,\ldots,A_m$ mają dodatnie wyznaczniki.

Każda macierz dodatnio określona jest nieujemnie półokreślona.

Macierz na pewno **nie** jest nieujemnie półokreślona, jeżeli na przekątnej ma co najmniej jeden wyraz ujemny.

Hesjanem funkcji f nazywamy macierz złożoną z jej pochodnych cząstkowych rzędu drugiego.

Funkcja określona na niepustym zbiorze wypukłym, różniczkowalna dwukrotnie w sposób ciągły, jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy jej hesjan w każdym punkcie dziedziny jest nieujemnie półokreślony.

Zadania

Rozstrzygnąć, czy następujące funkcje są wypukłe w swojej dziedzinie

118. $f(x)=\dfrac{1}{\|x\|^2}$ **119.** $f(x)=\dfrac{1}{1+\|x\|^2}$

120. $f(x)=\|x\|^2$ **121.** $f(x)=\|x\|$ **122.** $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^4$

123. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_1$

124. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_3x_1$

125. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$

126. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1$

127. $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|$

Konsultacje

Po niedzielnych zajęciach, godz. 12-14, pok. $2^9=(5+1+2)^3$.

Kolokwia (o godz. 8.15):

Kolokwium nr 1: 6.11.2005, zad. 1-38
Kolokwium nr 2: 11.12.2005, zad. 39-73
Kolokwium nr 3: 22.01.2006, zad. 1-113