

ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NOTATKI Z WYKŁADU 1.

Parametryzacją linii (łuku, krzywej) $K \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy funkcję $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, o dziedzinie $[a, b] \subset \mathbb{R}$ taką, że $F[[a, b]] = K$.

Na przykład

$$F : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, F(t) = (3 \cos |t|, 3 \sin |t|)$$

jest parametryzacją półokręgu K o środku (\dots, \dots) i promieniu \dots .

Tą parametryzację można notować inaczej:

$$x(t) = 3 \cos |t|, y(t) = 3 \sin |t|, t \in [-\pi, \pi]$$

lub

$$x = 3 \cos |t|, y = 3 \sin |t|, -\pi \leq t \leq \pi,$$

lub

$$x_t = 3 \cos |t|, y_t = 3 \sin |t|, -\pi \leq t \leq \pi.$$

Inną parametryzacją K jest:

$$x = 3 \cos |t|, y = 3 \sin |t|, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi.$$

Parametryzację linii K można interpretować jako opis ruchu punktu obiegającego całe K w czasie od a do b . W momencie t tego ruchu, prędkość $(x'(t), y'(t))$ jest wektorem stycznym do K w punkcie $(x(t), y(t))$, a szybkość jest długością tego wektora (o ile istnieją pochodne $x'(t), y'(t)$).

Długość linii K tylko w niektórych parametryzacjach jest równa drodze, jaką przebywa punkt ją opisujący.

1. Funkcja $F : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $F(t) = (t^2 + 1, 3t^2 + 4)$ przekształca punkty przedziału na punkty płaszczyzny; np.: $F(-1) = (2, \dots)$, $F(-0.5) = \dots$.

a) Czy p-ktky $(3.25, 10.75)$, $(1.09, 4.27)$, $(2.69, 9.07)$ należą do zbioru wartości F ?

b) Zbiorem wartości tej funkcji jest odcinek – jaki?

UWAGA. Mówimy też: $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = 3t^2 + 4$, $-1 \leq t \leq 2$ jest jedną z możliwych *parametryzacji* tego odcinka, inną jest: $x = t^2 + 1$, $y = 3t^2 + 4$, $0 \leq t \leq 2$. Czym się różnią?

2. Zaznacz łuki i podaj ich długości:

a) $x = \cos t$, $y = \sin t + 1$, $t \in [0, \pi]$

b) $x = \sin t$, $y = \sin t + 1$, $t \in [0, \pi]$

c) $x = \cos(\sin t)$, $y = \sin(\sin t) + 1$, $t \in [0, \pi]$

3. Czy jadące pojazdy A i B :

$x_A = t + 1, y_A = 4t + 3, t \in \mathbb{R}_+, x_B = t - 5, y_B = 2t + 1, t \in \mathbb{R}_+$
kiedyś się zderzą? Jeśli tak, to kiedy? Jeśli nie, to jak blisko miną się?