Analiza matematyczna 3, No...tki z wykładu 10.a

układ kartezjański		układ biegunowy
(x,y)	$\underset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{\longleftrightarrow}$	(r,φ)
$(1,1)$	$\longleftrightarrow$	$(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$
$(-3,3)$	$\longleftrightarrow$	(...... , ...)
(...... , ...)	$\longleftrightarrow$	$(7,\frac{5\pi}{4})$
(2, ...)	$\longleftrightarrow$	(...... , $\frac{\pi}{3}$)
$y>0$	$\longleftrightarrow$	$0<\varphi<\pi$
....	$\longleftrightarrow$	$\varphi\in[\pi,\frac{3}{2}\pi]$
....	$\longleftrightarrow$	$\varphi=\frac{\pi}{3}$
$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$	$\longleftrightarrow$	....
$x^2+y^2=9$	$\longleftrightarrow$	$r=3$
....	$\longleftrightarrow$	$r=5,\ \varphi\in[\pi,2\pi]$
....	$\longleftrightarrow$	$1\le r<4$
$(x-3)^2+y^2\le 9$	$\longleftrightarrow$	$r\le 6\cos\varphi,\ \varphi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$x^2+(y-5)^2=25$	$\longleftrightarrow$	....

PRZYKŁAD. A (Reklama układu biegunowego)

Napis (w układzie biegunowym) $r = e^{\varphi}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

można traktować jako funkcję $r = r(\varphi) = e^{\varphi}, \quad \varphi \in D = (0, \frac{\pi}{2})$.

W takim przypadku można wyświetlić w komputrze jej wykres
(w **układzie kartezjańskim**), w programie, który 'zna się' i dokona konwersji.

Można też traktować ten napis jak równanie:

$$r = e^{\varphi} \ ,$$

$$\ln r = \varphi \ .$$

Zakładając, że interesują na tylko $x, y > 0$, przejdźmy do układu kartezjańskiego (wtedy $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$).

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \ .$$

Takie równanie było rozważane (po 'Kartezjańsku') w zadaniu 8c) Listy 8.

Aby docenić układ biegunowy w tym przykładzie, należałoby więcej powiedzieć o... liczbach zespolonych...

ŚCIĄGA. Zmiana całki podwójnej w układzie kartezjańskim na całkę podwójną w układzie biegunowym

$$\iint_P f(x, y)\, d\omega = \iint_{\bar{P}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\, d\bar{\omega}.$$

PRZYKŁAD. B

$$\iint_{\substack{0 \le x \le y \\ x^2 + y^2 \le 4}} xy\, d\omega = \iint_{\substack{r \le 2 \\ \varphi \in [\pi/4, \pi/2]}} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r\, d\bar{\omega} = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\varphi\, dr\, d\varphi = \ldots$$

PRZYKŁAD KW1.
Niech K oznacza kulę o średnicy 2, a W – powierzchnię walca (nieskończoną rurę) o średnicy 1. Jaka część K leży poza W, gdy środek kuli leży na osi walca.

$$obj.(K \setminus W) = 2 \iint_{\frac{1}{4} \le x^2 + y^2 \le 1} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, d\omega \underset{\text{u.b.}}{=} 2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 - r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi = \ \ldots\ldots$$

PRZYKŁAD KW2.
Niech K oznacza kulę o średnicy 2, a W – powierzchnię walca (nieskończoną rurę) o średnicy 1. Jaka część K leży poza W, gdy środek kuli leży na powierzchni walca.