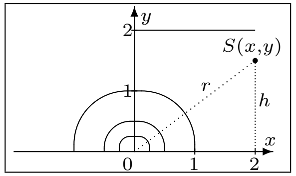
# Analiza matematyczna 3, No...tki z wykładu 11a

Ściąga. Zamiana zmiennych w całce podwójnej (zmiana układu współrzędnych)

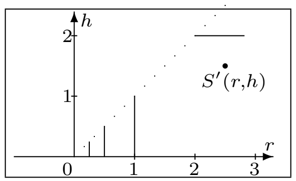
$$\iint\limits_{P} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\vec{F}[P]} f(x(r,h),y(r,h))\cdot |J|\,drdh$$

Wypełniańka (odlotowa). Ziemia, to linia $y=0$. Samolot nadlatuje nad lotnisko $L=(0,0)$; jest w punkcie $S=(x,y)=(2,\frac{3}{2})$. Pilot odczytuje z przyrządów:
$r$ – odległość od lotniska $L$, $h$ – wysokość nad ziemią,
co zapisuje: $S'=(r,h)=(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ .




Oczywiście mamy tu zależność funkcyjną: $\vec{F}(S)=S'$, która parze liczb $(x,y)$ przypisuje **parę** $(r,h)$ według wzorów:

$$r=\sqrt{\text{......}^{\,2}+\ \text{......}^{\,2}},\qquad h=\ldots .$$




W tym przekształceniu obrazem półokręgu o środku $(0,0)$ i promieniu 1 jest ...... o końcach $(...,...)$, $(...,...)$;
obrazem odcinka $[0,2]\times\{2\}$ jest odcinek o długości ...... .

Dziedziną $\vec{F}$ jest $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$; zbiorem wartości jest obszar kąta o ramionach ... i ... .
$\vec{F}$ nie jest różnowartościowa, bo np.: $\vec{F}(...,...)=\vec{F}(...,...)$. Jednak $\vec{F}$ ograniczona do pierwszej ćwiartki $(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$ jest '1-1' i przekształca ten zbiór na obszar ...... .
Zatem przy tym ograniczeniu $(x,y)$ można wyznaczyć poprzez $(r,h)$ wzorami:

$$x=x(r,h)=\sqrt{\text{......}^{\,2}-\ \text{......}^{\,2}},\qquad y=y(r,h)=\ \text{......}\ .$$

Oznaczmy przez $\vec{G}(r,h)=(x,y)$ tę funkcję (odwrotną do ograniczenia funkcji $\vec{F}$), czyli traktujemy $x=x(r,h)$, $y=y(r,h)$. Jej jakiobianem nazywamy wyznacznik:

$$J=\det\frac{D(x,y)}{D(r,h)}=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial h}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial h}\end{pmatrix}=\frac{\partial x}{\partial r}\cdot\frac{\partial y}{\partial h}-\frac{\partial x}{\partial h}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}$$

i w tym przypadku mamy: $J=$ ........... . (Uwaga. Jakobian zależy od ... i ... .)
Ten wyznacznik mówi jak (lokalnie) zniekształcane jest pole przez funkcję $\vec{G}$.

Przykład A. W tych nowych współrzędnych niektóre całki można łatwo obliczyć:

$$\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx=\int_{\ldots}^{\ldots}\int_{\ldots}^{\ldots} xy\,dxdy=\iint\limits_{\substack{1\le y\le 2\\ 0\le x\le\sqrt{4-y^2}}} xy\,d\omega=\left\{\begin{array}{l} x=\sqrt{r^2-h^2}\\ y=h\\ \\ J=\ \text{......}\end{array}\right\}=$$

$$=\iint\limits_{\substack{1\le h\le 2\\ h\le r\le 2}}\sqrt{r^2-h^2}\,h\cdot|J|\,d\bar{\omega}=\int_1^2\int_h^2 hr\,drdh=\ldots\qquad\qquad=\frac{9}{8}$$

Przykład B.

$$\iint\limits_{\substack{(x-3)^2+5(x+y)^2\le 1\\ x\ge 3}} x-y\,d\omega = \left\{\begin{array}{l} s=x+\ldots\\ t=\sqrt{5}(\ \ldots\ldots\ )\\ \\ J=\ldots=1/\sqrt{5}\end{array}\right\} =$$

$$= \iint\limits_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0}} \big((s+3)-(-s-3+t/\sqrt{5})\big)\tfrac{\sqrt{5}}{5}\,d\bar\omega = \tfrac{\sqrt{5}}{5}\iint\limits_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0}} 2s+6-t/\sqrt{5}\,d\bar\omega =$$

$$= \tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot 2\cdot\Big(\iint\limits_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0}} s\,d\bar\omega\Big) + \tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot 6\cdot\Big(\iint\limits_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0}} 1\,d\bar\omega\Big) - \tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\Big(\iint\limits_{\substack{s^2+t^2\le 1\\ s\ge 0}} t\,d\bar\omega\Big) =$$

$$= \tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot 2\cdot\Big(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_0^1 r\cos\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi\Big) + \tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot 6\cdot\Big(\tfrac12\pi 1^2\Big) - \tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\Big(0\Big) =$$

$$= \tfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot 2\cdot\Big(\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\tfrac13\cos\varphi\,dr\,d\varphi\Big) + \tfrac{3\sqrt{5}}{5}\pi - 0 = \tfrac{4}{15}\sqrt{5} + \tfrac{3\sqrt{5}}{5}\pi$$

Przykład C'.

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-2\sqrt{x}+x} x+y+2\sqrt{xy}\,dydx = \left\{\begin{array}{l} s=\sqrt{x}\\ t=\sqrt{y}\\ \\ J=\ \ldots\ldots\end{array}\right\} = \int\limits_0^1\int\limits_0^{1-s}(s+t)^2 4st\,dt\,ds = \begin{array}{c}\text{dalej już}\\ \text{tylko (?)}\\ \text{żmudnie}\end{array} =$$

$$= \int\limits_0^1 4s\left(\tfrac{s^2t^2}{2}+\tfrac{2st^3}{3}+\tfrac{t^4}{4}\right)_{t=0}^{t=1-s} ds = \ldots = \int\limits_0^1 \tfrac13(s^5-4s^2+3s)\,ds = \tfrac13(\tfrac16-\tfrac43+\tfrac32) = \tfrac19.$$

Przykład C". Może być nieco zaskakujące inne, poniższe podstawienie:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-2\sqrt{x}+x} x+y+2\sqrt{xy}\,dydx = \left\{\begin{array}{l} x=s\cdot\cos^4 t\\ y=s\cdot\sin^4 t\\ J=\det\begin{pmatrix}\cos^4 t & -4s\cos^3 t\sin t\\ \sin^4 t & 4s\sin^3 t\cos t\end{pmatrix} = 4s\sin^3 t\cos^3 t\end{array}\right\} =$$

(Pewną trudność sprawia tu wyznaczenie nowych granic całkowania.)

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} s\cdot|4s\sin^3 t\cdot\cos^3 t|\,dt\,ds = \int\limits_0^1 4s^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot(1-\sin^2 t)\cos t\,dt\,ds =$$

$$= 4\int\limits_0^1 s^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot\cos t-\sin^5 t\cdot\cos t\,dt\,ds = 4\int\limits_0^1 s^2\left(\tfrac14\sin^4 t-\tfrac16\sin^6 t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} ds =$$

$$= 4\big(\tfrac14-\tfrac16\big)\cdot\int\limits_0^1 s^2\,ds = \tfrac13\cdot\big(\tfrac13 s^3\big)_0^1 = \tfrac19$$