Analiza matematyczna 3, No...tki z wykładu 11.b

układ kartezjański (x, y, z)	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$ $x = r\cos\varphi$ $y = r\sin\varphi$ $z = h$	układ cylindryczny (r, φ, h)
$(1, 1, 1)$	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	$r = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ h = 1$
$(-3, 3, -2)$	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	$r =$ ...... , $\varphi =$ ...... , $h =$ ......
(...... , ... , ...)	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	$r = 7,\ \varphi = \frac{7\pi}{4},\ h = -2$
$x, y, z \geq 0$	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	....
....	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	$r \leq 2,\ \varphi \in [\pi, \frac{3}{2}\pi],\ 1 \leq h \leq 5$
....	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	$r = \varphi,\ h = 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
....	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	$r = \varphi,\ h = \varphi,\ \lvert\varphi\rvert \leq \frac{\pi}{2}$
....	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	$r = \varphi^2,\ h \in [0, r],\ \lvert\varphi\rvert \leq \sqrt{\pi/2}$
$x^2 + y^2 - 6y = 0,\ 1 \leq z \leq 4$	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	....
$z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 3$	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	....
....	$\leftarrow\!\sim\!\rightarrow$	....

Ściąga Zmiana całki potrójnej w układzie kartezjańskim na całkę potrójną w układzie cylindrycznym

$$\iiint\limits_{W} f(x,y,z)\,d\omega = \iiint\limits_{\overline{W}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, h)\cdot r\,d\bar{\omega}.$$

Przykład A.

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 4\\ 1\le z\le 3}} xy+z\,d\omega = \iiint\limits_{\substack{\varphi\in[0,2\pi]\\ r\le 2,\ h\in[1,3]}} (r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi+h)\cdot r\,d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_1^3 \tfrac{1}{2}r^3\sin 2\varphi + hr\,dh\,dr\,d\varphi =$$

Przykład B.

$$\iiint\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 4} z\,d\omega = \iiint\limits_{\substack{\varphi\in[0,2\pi]\\ r\le 4,\ r\le h\le 4}} h\cdot r\,d\bar{\omega} = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_r^4 hr\,dh\,dr\,d\varphi = \ \ldots\ldots$$

Przykład C.

Niech $S=\{(x,y,z): 0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$ i $W=\{(x,y,z): x^2+y^2\le x\}$.
Oblicz objętość $S\cap W$.

$$\iiint\limits_{S\cap W} 1\,d\omega = \iiint\limits_{\substack{\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]\\ r\le\cos\varphi,\ 0\le h\le 1-r}} 1\cdot r\,d\bar{\omega} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\varphi}\int_0^{1-r} r\,dh\,dr\,d\varphi = \ \ldots\ldots$$