Analiza matematyczna 3, No...tki z wykładu 11a

Pole płata (figle płata :)

Wyznaczymy pole powierzchni płata – to jest części wykresu funkcji $z = f(x, y)$ nad obszarem $P \subset \mathbb{R}^2$ domkniętym i ograniczonym, zawartym w dziedzinie funkcji f (przy założeniu ciągłości pochodnych cząstkowych f'_x, f'_y).

Pomysł:

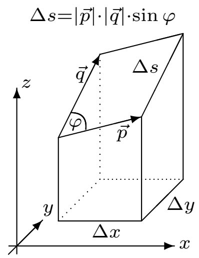
Bierzemy 'drobny' podział $\omega = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ obszaru P 'głównie' na prostokąty o polach Δp_i ('głównie' tzn. elementy podziału, które nie są prostokątami mają **łącznie** 'znikome' pole). Wybieramy punkty $(x_i, y_i) \in P_i$ i w przestrzeni prowadzimy płaszczyzny styczne do wykresu f w punktach $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$. Części tych płaszczyzn utworzone nad prostokątami P_i wyglądają jak karteczki (równoległoboki) oblepiające tę powierzchnię. Suma ich pól $\sum_i \Delta s_i$ przybliża szukane pole płata.

'Nad' ustalonym prostokątem z podziału ω 'żyje karteczka', tj. równoległobok rozpięty przez (pewne) wektory $\vec{p}, \vec{q}$

Płaszczyzna styczna jest wyznaczona przez gradient funkcji f, zatem można przyjąć, że te wektory mają współrzędne:

$$\vec{p} = [\Delta x, 0, f'_x \cdot \Delta x], \quad \vec{q} = [0, \Delta y, f'_y \cdot \Delta y].$$

Stąd obliczamy pole Δs owego równoległoboku (korzystając z prostoty iloczynu skalarnego):



$$\Delta s = |\vec{p}||\vec{q}| \sin\varphi = |\vec{p}||\vec{q}|\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 - (|\vec{p}||\vec{q}|\cos\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{((\Delta x)^2 + (f'_x \Delta x)^2)((\Delta y)^2 + (f'_y \Delta y)^2) - (f'_x \Delta x \cdot f'_y \Delta y)^2} =$$

$$= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}$$

Uwaga. Powyżej pominięte są indeksy '$_i$', pochodne cząstk. liczone są w punktach (x_i, y_i).

Zatem pole płata f nad P jest w przybliżeniu równe

$$\sum_i \Delta s_i = \sum_i \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\,\Delta x \Delta y = \sum_i \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\,\Delta p_i \approx \boxed{\iint_P \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}}$$

'$\approx$' oznacza tu: gdy weźmiemy ciąg coraz drobniejszych podziałów (o maksymalnych średnicach zbieżnych do 0), to granica sum $\sum_i \Delta s_i$ jest zbieżna do całki (z def. całki).

Przykład A.

Powierzchnia płata $f(x,y) = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})$ nad trójkątem P o wierzchołkach $(0,0),(0,1),(7,1)$, czyli nad obszarem: $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 7y$:

$$\iint\limits_P \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\, d\omega = \iint\limits_{\substack{0\le y\le 1\\ 0\le x\le 7y}} \sqrt{1+x+y}\, d\omega =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{7y} \sqrt{1+x+y}\, dx \right) dy = \int\limits_0^1 \left(\tfrac{2}{3}(1+x+y)^{\frac{3}{2}} \right)_0^{7y} dy =$$

$$= \ldots$$

$$= \tfrac{25}{3} - \tfrac{16}{15}\sqrt{2}\ .$$

Przykład B. Oblicz pole zbioru $S = \{(x,y,z) : z = xy,\ x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le x \le y\}$.

Odczarujmy ten napis; chodzi tu zapewne o

pole płata $f(x,y) = xy$ nad zbiorem $P = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le x \le y\}$, czyli

$$\iint\limits_P \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\, d\omega = \iint\limits_P \sqrt{1 + y^2 + \ \ldots\ldots\ ^2}\, d\omega =$$

$$\overset{\substack{\text{współ.}\\ \text{bieg.}}}{=} \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int\limits_0^3 \sqrt{1+r^2} \cdot r\, dr \right) d\varphi =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} \cdot \left[\tfrac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \tfrac{\pi}{12}(10\sqrt{10} - 1).$$

Uwaga. Można pomyśleć o przybliżaniu powierzchni płata w inny sposób: wybieramy na płacie skończenie wiele punktów 'gęsto rozmieszczonych (dużo)'; z nich tworzymy trójkąty (triangulację); suma pól tych trójkątów powinna przybliżać pole płata — **TEN POMYSŁ JEST ZŁY**, zły nawet w przypadku powierzchni bocznej walca; szczegóły (i rysunki) należy znaleźć np. w III tomie Fichtenholza, rozdział XVII, §2.