Analiza matematyczna 3, No...tki z wykładu 11d

Cóż niewłaściwego jest w całkach niewłaściwych?

Przykład A. Licząc pole półsfery o promieniu 2, przejście do układu biegunowego pozwoliło zgrabnie znaleźć funkcję pierwotną, ALE...
nie zauważamy, że wcześniej robimy błąd:

$$\ldots = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, d\omega = \ldots$$

Otóż dla punktów okręgu $x^2+y^2=4$ mamy 'zera w mianownikach'!.

Zastąpienie nierówności słabej ostrą:

$$\ldots = \iint\limits_{x^2+y^2< 4} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, d\omega = \ldots$$

nie rozwiązuje problemu. Bowiem dla elementów podziału wnętrza koła $x^2+y^2<4$, stykających się z brzegiem, kres górny funkcji (podcałkowej) jest równy $+\infty$, co (z definicji całki) powoduje, że całka górna jest równa $+\infty$. Po prostu ta funkcja nie jest całkowalna w sensie przyjętej definicji.

Ta całka, jest zatem całką niewłaściwą, której wartość obliczymy przybliżając całkę całkami po obszarach coraz lepiej przybliżających wnętrze koła:

$$\ldots = \iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, d\omega = \lim_{b\to 2^-} \iint\limits_{x^2+y^2\le b^2} \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\, d\omega = \text{ i dalej ukł. bieg.}$$

$$= \lim_{b\to 2^-} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{b} \frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\cdot r\, dr\, d\varphi = \lim_{b\to 2^-} 2\pi \left(-2\sqrt{4-r^2}\right)_0^b =$$

$$= \lim_{b\to 2^-} 2\pi \left(-2\sqrt{4-b^2}+2\sqrt{4-0^2}\right) = 8\pi. \qquad \square$$

Przykład B. W poniższej całce niewłaściwej zamiast po kole całkujemy po pierścieniach kołowych omijających $(0,0)$, przybliżających owe koło:

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 3} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\omega = \lim_{a\to 0^+} \iint\limits_{a^2\le x^2+y^2\le 3} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\omega = \lim_{a\to 0^+} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_a^{\sqrt{3}} \frac{1}{r}\cdot r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} 2\pi(\sqrt{3}-a) = 2\pi\sqrt{3}. \qquad \square$$

Przykład C.
W poniższej całce niewłaściwej trzeba coraz lepiej wypełniać kwadrat $[0,4]^2$ omijając osie układu współrzędnych, np. tak:

$$\iint\limits_{[0,4]^2} \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}}\,d\omega = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 0^+}} \iint\limits_{[a,4]\times[b,4]} \frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}}\,d\omega = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 0^+}} \int\limits_a^4 \int\limits_b^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 0^+}} \int\limits_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}\right)\Big|_b^4 dx = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 0^+}} \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{b^2}\right) \cdot \int\limits_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 0^+}} \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{b^2}\right) \cdot \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_a^4 = \lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 0^+}} \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{b^2}\right) \cdot 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{a}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{0}\right) \cdot 2\left(\sqrt{4} - \sqrt{0}\right) = 12\sqrt[3]{2}. \qquad \square$$

Przykład D.
W poniższej całce niewłaściwej najwygodniej będzie wypełniać płaszczyznę coraz większymi kołami (tak, by zgrabnie użyć współrzędne biegunowe):

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,d\omega = \lim_{R\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,d\omega = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R \frac{1}{1+r^2} \cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\ln\left(1+r^2\right)\Big|_0^R d\varphi = \lim_{R\to+\infty} \pi\left(\ln\left(1+R^2\right) - \ln 1\right) = +\infty.$$

Mówimy, że (ta) całka niewłaściwa jest rozbieżna (do $+\infty$). $\square$

Przykład E. $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,d\omega = \lim\ \ldots\ldots$