

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NOT(AT)KI 12B.

CAŁKA POWIERZCHNIOWA NIEZORIENTOWANA

Niech $f(x, y, z)$ będzie określona na powierzchni S . Podział $\omega = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ powierzchni S na 'prawie rozłączne płyty' o polach $|S_i|$ i wybór punktów $a_i \in S_i$ wyznacza pewne przybliżenie **całki powierzchniowej nieorientowanej**:

$$\iint_S f(x, y, z) dS \approx \sum_{i=1}^m f(a_i) \cdot |S_i|$$

Dokładniej: jeśli dla coraz drobniejszych podziałów (o średnicach zbieżnych do 0) sumy po prawej stronie są coraz bliżej pewnej liczby (niezależnie od wyboru punktów), to tę liczbę nazywamy całką powierzchniową nieorientowaną funkcji f po powierzchni S .

INTERPRETACJE. $\iint_S f(x, y, z) dS$:

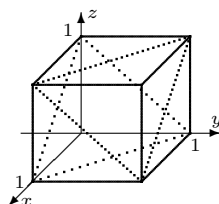
- masa powierzchni S , której gęstość w punkcie (x, y, z) ma wartość $f(x, y, z)$ [kg/m²],
- koszt wyłożenia S kafelkami, których cena w (x, y, z) wynosi $f(x, y, z)$ [zł/m²].

1. Na powierzchni S sześcianu $[0, 1]^3$ $f(x, y, z) = [x + y + z] + \pi$ przyjmuje wartości: $0 + \pi, 1 + \pi, \dots$. Zatem

$$\iint_S [x + y + z] + \pi dS = (0 + \pi) \cdot (3 \cdot \frac{1}{2}) + \dots + \dots = \dots$$

Dla funkcji $f(x, y, z) = [z] \cdot [y + 7]$ mamy:

$$\iint_S [z] \cdot [y + 7] dS = \iint_S [z] \cdot [y + 7] dS = \dots$$



Tw. Jeśli powierzchnia S jest wykresem funkcji gładkiej $g(x, y)$ określonej na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, czyli gdy $S = \{(x, y, z) : z = g(x, y), (x, y) \in D\}$, to całkę powierzchniową z funkcji $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ zamieniamy na całkę podwójną:

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (\frac{\partial g}{\partial x})^2 + (\frac{\partial g}{\partial y})^2} d\omega}$$

2. $S = \{(x, y, z) : 2x + 3y + z = 6, x, y, z \geq 0\}$ jest wykresem f-cji $g(x, y) = 6 - 2x - \dots$ o dziedzinie $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \dots \leq y \leq \dots\}$; zatem

$$\iint_S (z-6)^2 dS = \iint_D (6-2x-3y-6)^2 \cdot \sqrt{1 + (-2)^2 + \dots} d\omega = \int_0^3 \int_0^{\dots} \dots dy dx = \dots$$

3. Półsfera $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2z, z \geq 1\}$ jest wykresem funkcji $g(x, y) = \dots$ o dziedzinie $D = \{(x, y) : \dots\}$; zatem

$$\iint_S z dS = \iint_D (\dots) \cdot \sqrt{1 + (\dots)^2 + (\dots)^2} d\omega = \dots$$

4. Dla brzegu S czworoscianu $OABC$ (p.rys.) całki powierzchniowe można obliczyć 'na palcach':

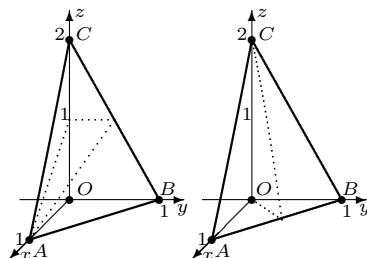
a) $\iint_S e^{[x+y]} dS = \dots = e^0 \cdot |S| = \dots$

b) $\iint_S e^{[x-y]} dS = \dots$

c) $\iint_S e^{[x+z]} dS = \dots$

d) $\iint_S e^{[x+y+z]} dS = \dots$

Do których całek pomocne są rysunki (z prawej)?



4'. Oblicz. (Poniższe całki opisują objętości pewnych ostrosłupów; opisz je (słowami).)

a) $\iint_{ABC} z dS = \text{obj. ostrosłupa o podstawie } \Delta ABC \text{ i wysokości } 2,$

b) $\iint_{ABC} x dS =$

c) $\iint_{ABC} x + y dS =$

5. Oblicz $\iint_{\substack{z+x^2+y^2=1 \\ z \geq 0}} \sqrt[3]{1+4x^2+4y^2} dS =$