Analiza matematyczna 3, Not(at)ki 13.b

$f(x,y)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F}=(P,Q)$, gdy $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$.
$f(x,y,z)$ nazywamy potencjałem pola wektorowego $\vec{F}=(P,Q,R)$, gdy $\vec{F}=\text{grad}\,(f)$.

Czy pole wektorowe ma potencjał? Czasami można... odgadnąć takie f, spróbuj:

a) $\vec{F}(x,y)=(x,y)$ **b)** $\vec{F}(x,y)=(y,x)$ **c)** $\vec{F}(x,y)=(x^2,y^2)$

d) $\vec{F}(x,y)=(y^2,x^2)$ **e)** $\vec{F}(x,y)=(xy^2,x^2y+y^3)$ **f)** $\vec{F}(x,y)=(ye^x,e^x)$

g) $\vec{F}(x,y)=(e^x-\sqrt{2},\frac{1}{1+y^2}+\pi)$ **h)** $\vec{F}(x,y,z)=(2xyz,x^2z,x^2y+1)$

i) $\vec{F}(x,y)=(e^y,xe^y+y)$ **j)** $P(x,y)=y^2e^{xy}$, $Q(x,y)=(1+xy)e^{xy}$

k) $\vec{F}(x,y,z)=(2xyz,x^2z,x^2y+1)$ **l)** $P=yz$, $Q=xz$, $R=xy$

m) $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xz+1,2y(z+1),x^2+y^2+3z^2)$ **n)** $\mathbf{F}(x,y,z)=(x,z,y)$

Odp. a) $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, **d)** brak, **h)** $f(x,y,z)=x^2yz+z$, **n)** $f(x,y,z)=\frac{1}{2}x+yz$

Twierdzenie. Gdy $\vec{F}=\text{grad}\,f$ i $\vec{r}:[a,b]\to\Gamma$ jest gładką parametryzacją łuku Γ skierowanego od $A=\vec{r}(a)$ do $B=\vec{r}(b)$, to

$$\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=f(B)-f(A)$$

Przykład.
Gdy $\vec{F}(x,y)=(2xy^2,2x^2y)$, Γ krzywa od $A=(5{,}2)$ do $B=(9{,}1)$, to

$$\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r} \underset{\substack{f(x,y)=x^2y^2\\ F=\text{grad} f}}{=} \quad = f(B)-f(A)=9^2\cdot1^2-5^2\cdot2^2=-19$$

Przykład.
Gdy $\vec{F}(x,y)=(y\cos xy, x\cos xy)$ i Γ krzywa od $A=(\frac{\sqrt{\pi}}{2},\frac{\sqrt{\pi}}{3})$ do $B=(\frac{\sqrt{\pi}}{3},\frac{\sqrt{\pi}}{2})$,
to $\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=...$

Zadanie.
Niech f,g,h będą ciągłymi funkcjami **jednej** zmiennej. Udowodnij, że całka $\int_\Gamma f(x)dx+g(y)dy+h(z)dz$ nie zależy od drogi Γ (zależy tylko od początku i końca).

Dowód.

$$\int_\Gamma \vec{F}\circ d\vec{r}=\int_a^b P(x(t),y(t))\,\frac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\,\frac{dy}{dt}\,dt=$$

$$=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\,\frac{dy}{dt}\,dt=$$

$$=\left[f\left(x(t),y(t)\right)\right]_a^b=f\left(x(b),y(b)\right)-f\left(x(a),y(a)\right)=f\left(\vec{r}(b)\right)-f\left(\vec{r}(a)\right). \quad \square$$

TWIERDZENIE GREENA. Niech K będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwzegarowo) ograniczającą obszar Ω bez 'dziur' i niech $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ będzie polem wektorowym określonym na Ω, gdzie P, Q są klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy

$$\int_K P dx + Q dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\omega \ .$$

PRZYKŁAD 1. Niech $\vec{F}(x,y) = (\cos e^x - y, 3x + \sin(y^3+y))$, $K = \{(x,y); x^2+y^2=4\}$ skierowany dodatnio. Wtedy:

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_{x^2+y^2\le 4} \frac{\partial\big(3x+\sin(y^3+y)\big)}{\partial x} - \frac{\partial\big(\cos e^x - y\big)}{\partial y}\, d\omega = \iint_{x^2+y^2\le 4} 3-(-1)\, d\omega = 4\cdot \pi 2^2$$

UWAGA. Ten sam wynik otrzymamy dla $\vec{F}(x,y) = (-y + cosik(x), 3x + jakiesik(y))$.

PRZYKŁAD 2. Dla $\vec{F}(x,y) = (x^4+y, 4x+\sin y^2)$, $K = \{(x,y); x^2+y^2=4,\ y \ge 0\}$ skier.dodatnio.

Tu nie można wprost zastosować tw.G., bo K nie ogranicza żadnego obszaru. Można ją uzupełnić, np. odcinkiem od $A=(-2,0)$ do $B=(2,0)$. Łącznie te dwie krzywe ograniczają półkole $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0\}$. Wtedy:

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} + \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, d\omega,$$

skąd

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, d\omega - \int_{AB} \vec{F} \circ d\vec{r} =$$

$$= \iint_\Omega 4-1\, d\omega - \int_{-2}^{2} (t^4+0)\cdot 1 + (4t+\sin 0)\cdot 0\, dt = \qquad \text{tu } AB: \begin{cases} x=t,\ y=0, \\ t\in[-2,2] \end{cases}$$

$$= 3\cdot \tfrac{1}{2}\pi 2^2 - (\tfrac{1}{5}t^5)_{-2}^{2} = 6\pi - \tfrac{64}{5} \qquad \square$$

PRZYKŁAD 3. $\vec{F}(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, $\Omega = \{(x,y); 4 \le x^2+y^2 \le 16\}$,

(tu brzeg Ω to 2 okręgi; JAKIE wybrać skierowanie? Będzie o tym 20.01.2023)

$$\int_K \vec{F} \circ d\vec{r} = \ldots$$