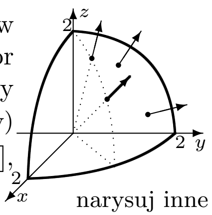
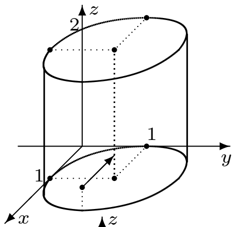
Analiza matematyczna 3. $\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$ – notatki powierzchowne

1. Do powierzchni $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4, x,y,z \geq 0\}$ w punkcie $P(x,y,z)$ można wystawić wektor normalny $\vec{n}$, tj. wektor prostopadły do S, o długości 1, zaczepiony w P. Wektor normalny zależy od S i P więc należałoby pisać $\vec{n}_S(x,y,z)$ (są dwa takie wektory) Np. $\vec{n}(1,1,\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\cdot[1,1,\sqrt{2}]$, $\vec{n}(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},...) = \frac{1}{...}\cdot[\frac{\sqrt{3}}{2},...,...]$, $\vec{n}(\sqrt{3},1,...) = \frac{1}{...}\cdot[...,...,...]$. Ogólnie: $\vec{n}_S(x,y,z) = \frac{1}{...}\cdot[x,y,z]$.

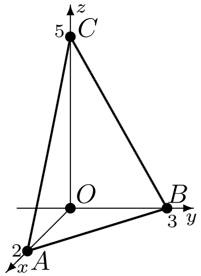


narysuj inne

2. Dla $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 2x+2y-1, 0 \leq z \leq 2\}$, tj. dla pow. bocznej walca, $\vec{n} = [-1,0,0]$ jest wektorem normalnym do B w punkcie $(2,1,\frac{1}{4})$ skierowanym do wewnątrz. Ten sam wektor $\vec{n}$ jest normalny dla punktów: $(2,...,1)$, $(...,...,\frac{5}{3})$, $(...,...,...)$ ... . $\vec{n}(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \;...\;, \sqrt{2}) = [...,...,...]$, $\vec{n}(\;...\;, 1-\frac{\sqrt{3}}{2},...) = [...,...,...]$, $\vec{n}(\;...\;, \frac{3}{2},...) = [...,...,...]$. Ogólnie: $\vec{n}_B(x,y,z) = [1-x,...,...]$.



3. Na pow. S czworościanu $OABC$ (p.rys) wektorami normalnymi (skierowanymi na zewnątrz) są: $[0,-1,0]$ dla p-tów ściany OAC, $[-1,0,0]$ dla ściany ... , $[...,...,...]$ dla ściany OAB. Dla ABC wektor normalny musi być prostopadły do leżących na ABC wektorów: $\vec{CA} = [2,0,-5]$, $\vec{CB} = [0,3,-5]$; łatwo zgadnąć, że wektor $\vec{v} = [\frac{5}{2},\frac{5}{3},1]$ jest do nich prostopadły (oblicz iloczyny skalarne $\vec{v}\circ\vec{CA}$, $\vec{v}\circ\vec{CB}$); zatem: $\vec{n}_{ABC} = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{(...)^2+(...)^2+1^2}}\cdot[\frac{5}{2},\frac{5}{3},1]$.



(Zamiast zgadywać można wiedzieć, że iloczyn **wektorowy** $\vec{CA}\times\vec{CB}$ jest prostopadły do nich i normując go [dzieląc przez długość] otrzymamy $\pm\vec{n}$. Dalej pokażemy ogólny sposób.)

Niech na powierzchni S będzie zadana orientacja, tj. w każdym punkcie wybrany będzie wektor $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ normalny do S w tym punkcie i niech $\vec{F} = (P,Q,R)$ będzie polem wektorowym określonym na S. **Całka powierzchniowa zorientowana** $\iint\limits_S \vec{F}\circ d\vec{S}$ jest równa całce powierzchniowej niezorientowanej $\iint\limits_S (\vec{F}\circ\vec{n})\,dS$.

Inna notacja całki powierzchn. zorientowanej to: $\iint_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy$.

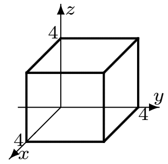
Zatem całka pow. zorient. $\iint_S \vec{F}\circ d\vec{S}$ jest przybliżana przez sumy: $\sum_i (\vec{F}\circ\vec{n})\cdot|S_i|$, gdzie $\vec{F}\circ\vec{n}$ oznacza długość rzutu (prostopadłego) wektora $\vec{F}$ na wektor $\vec{n}$ (oba zależą od wybranych punktów $(x_i,y_i,z_i)\in S_i$), a $|S_i|$ oznacza pole S_i z podziału pow. S.

Lapidarnie mówiąc całka zorientowana rozkłada pole $\vec{F}$ na sumę $\vec{F}_n + \vec{F}_S$ gdzie $\vec{F}_n \perp S$ a $\vec{F}_S$ 'leżą' na S oraz 'zlicza ze znakiem' długości F_n; mamy $\iint_S \vec{F}\circ d\vec{S} = \iint_S F_n\,dS$.

Gdy $\vec{F}$ oznacza (wektory) prędkości przepływu wody, to przez 'mały' kawałek S_i pow. S w jednostce czasu przepływa 'słup' wody o obj. $F_n\cdot|S_i|$, więc $\iint_S \vec{F}\circ d\vec{S}$ mierzy bilans przepływu wody przez S (w jednostce czasu i ze 'znakiem', tj. dodatnim jest przepływ na stronę powierzchni wskazywaną przez zwroty wektorów normalnych).

Dla pow. S sześcianu $[0,4]^3$ patrzymy na pary przeciwległych ścian:

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{0\leq y,z\leq 4} P(4,y,z) - P(0,y,z)\,dS +$$
$$+ \iint\limits_{0\leq x,z\leq 4} Q(x,4,z) - Q(x,0,z)dS + \iint\limits_{0\leq x,y\leq 4} R(x,y,4) - R(x,y,0)dS$$



np. $\iint\limits_S (x+2y)\,dydz + xz\,dzdx + x^2y\,dxdy = \iint\limits_{0\leq y,z\leq 4} 4dS + \iint\limits_{0\leq x,z\leq 4} 0dS + \iint\limits_{0\leq x,y\leq 4} 0dS = 64$

Jeśli powierzchnia S jest wykresem f-cji $z(x,y)\in C^1$ określonej na obszarze D, to dla punktu $A(x,y,z(x,y))$ tej pow. wektory $\left[1,0,\frac{\partial z}{\partial x}\right]$, $\left[0,1,\frac{\partial z}{\partial y}\right]$ wyznaczają pł. styczną. Zatem wektor $\left[\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right]$ jest prostopadły do S w p-kcie A (oblicz il. skalarne) i $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\cdot\left[\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right]$ jest normalny (zadając orientację na S). Mamy:

$$\iint\limits_S \vec{F}\circ d\vec{S} = \iint\limits_S (\vec{F}\circ\vec{n})\,dS = \iint\limits_S (P,Q,R)\circ\left(\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\cdot[\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1]\right)dS =$$
$$= \iint\limits_D \left(P\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + Q\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - R\right)\frac{1}{\sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2+1}}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,d\omega, \text{ czyli:}$$

$$\boxed{\iint\limits_S \vec{F}\circ d\vec{S} = \iint\limits_D P\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + Q\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - R\,d\omega}$$ (zamiana całki skierowanej na podwójną)

4. Półsfera $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 2z, z \geq 1\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y) = 1+\sqrt{1-x^2-y^2}$ o dziedzinie $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$, więc np.:

$$\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint\limits_D x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + y\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - (1+\sqrt{1-x^2-y^2}) =$$
$$= -\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + 1 \overset{\text{wsp. bieg.}}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} + r\,dr\,d\varphi = \;......$$

5. Powierzchnia $S = \{(x,y,z) : 0 \leq z = 1-x^2-y^2\}$ jest wykresem funkcji $z(x,y) = 1-x^2-y^2$ dla punktów koła $D: \; x^2+y^2 \leq 1$ i $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, więc

$$\iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint_D -x\cdot(-2x) - y\cdot(-2y) + (1-x^2-y^2) =$$
$$= \iint_D 1+x^2+y^2 = |D| + \iint_D x^2+y^2 \overset{\text{wsp. bieg.}}{=} \pi + \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\varphi = \pi + 2\pi\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{2}\pi.$$

Uwaga. Funkcja $z(x,y)$ 'zadaje orientację do góry' pow. S, więc jeśli oryginalna orientacja S jest przeciwna, to wynik jest przeciwny: $-\frac{3}{2}\pi$.

6. Powierzchnia (boczna stożka) $\Omega: \; z^2 = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 4$ jest wykresem funkcji $z(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dla punktów koła $D: \; x^2+y^2 \leq 4^2$, zatem

$$\iint_\Omega (y-z)\,dydz + (z-x)\,dzdx + (x-y)\,dxdy =$$
$$= \iint_D -(y-\sqrt{x^2+y^2})\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - (\sqrt{x^2+y^2}-x)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x-y)\,d\omega =$$
$$= \iint_D 2(x-y)\,d\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^4 2(r\cos\varphi - r\sin\varphi)\cdot r\,dr\,d\varphi = 2[\sin\varphi+\cos\varphi]_0^{2\pi}\cdot[\tfrac{1}{3}r^3]_0^4 = 0.$$