Analiza matematyczna 3, Notatki powierzchowne c.d.

Twierdzenie. (Gaussa–Ostrogradzkiego) Niech S będzie powierzchnią **zamkniętą**, kawałkami gładką, ograniczającą obszar V i zorientowaną na zewnątrz i niech pole wektorowe $\vec{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$ określone na $S\cup V$ będzie C^1 gładkie. Wtedy

$$\boxed{\iint\limits_S \vec{F}\circ d\vec{S}=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{F}\,d\omega\ .}$$

W innej notacji: $\displaystyle\iint\limits_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\,d\omega\ .$

0. Obliczmy $\displaystyle\iint\limits_S 2x\,dydz+xy\,dzdx+xz\,dxdy$, gdzie $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2=2y\}$.

S jest sferą ograniczającą kulę K o środku w $(0,1,0)$ i promieniu 1.
Na S przyjmiemy orintację na zewnątrz kuli:

$$\iint_S\vec{F}\circ d\vec{S}=\{\text{tw. Gaussa}\}=\iiint_K \operatorname{div}\ \vec{F}=\iiint_K\frac{\partial 2x}{\partial x}+\frac{\partial xy}{\partial y}+\frac{\partial xz}{\partial z}=\iiint_K 2+2x=$$

$$=\left(\iiint_K 2\right)+2\iiint_K x=2|K|+2\iiint_K x=2\cdot\tfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3+0=\tfrac{8}{3}\pi$$

($\iiint_K x=0$ bo $x=0$ jest płaszczyzną symetrii kuli K). □

1. Dla brzegu S kuli $V=\{(x,y,z):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2\}$ zorientowanego na zewnątrz, stosując tw. Gaussa (i trik dodania i odjęcia $a+b+c$) mamy:

$$\iint\limits_S(x^2,y^2,z^2)\circ d\vec{S}=\iiint\limits_V 2x+2y+2z=2\iiint\limits_V(x-a)+(y-b)+(z-c)+(a+b+c)=$$

ponieważ: $\iiint_V(x-a)=0$, $\iiint_V(y-b)=0$, $\iiint_V(z-c)=0$ (z symetrii), więc

$$=2\iiint\limits_V(x-a)+(y-b)+(z-c)+2\iiint\limits_V a+b+c=2\cdot 0+2(a+b+c)\cdot|V|=2(a+b+c)|V|.$$

Można ten rezultat uogólnić, np. dla elipsoid: $S:\ \frac{(x-a)^2}{A^2}+\frac{(y-b)^2}{B^2}+\frac{(z-c)^2}{C^2}=1$ lub dla pow. prostopadłościanów $V=[a-a',a+a']\times[b-b',b+b']\times[c-c',c+c']$; a także dla pola $\vec{F}(x,y,z)=(x^2+yz^5,y^2-3x\sin z,z^2+e^{\sin x}y^9)$ (dlaczego?). □

2. Dla brzegu S kuli $V=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\le 5^2\}$ zorientowanego na zewnątrz, stosując tw. Gaussa (i zamianę na współrzędne sferyczne) dostajemy:

$$\iint\limits_S(x^3,y^3,z^3)\circ d\vec{S}=\iiint\limits_V 3x^2+3y^2+3z^2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^5 3r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta=3\cdot 5^4\cdot 4\pi.$$

3. Powierzchnia $S=\{(x,y,z):0\le z=1-x^2-y^2\}$ zorientowana 'do góry' nie jest zamknięta, ale po 'domknięciu' jej kołem $K=\{(x,y,0):x^2+y^2\le 1\}$, z wektorem normalnym $[0,0,-1]$, ogranicza obszar V, więc dla $\vec{F}=(2xy-\sin z,x-y^2,z)$ mamy

$$\iint\limits_{S\cup K}\vec{F}\circ d\vec{S}=\iiint\limits_V\frac{\partial(2xy-\sin z)}{\partial x}+\frac{\partial(x-y^2)}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=\iiint\limits_V 2y-2y+1=|V|=\ldots=\frac{\pi}{2}\ .$$

Ponieważ $\displaystyle\iint\limits_K\vec{F}\circ d\vec{S}=\iint\limits_K(2xy-\sin z,x-y^2,z)\circ(0,0,-1)dS=\iint\limits_K -z\,dS=\iint\limits_K 0\,dS=0$

więc $\displaystyle\iint\limits_S\vec{F}\circ d\vec{S}=\iint\limits_{S\cup K}\vec{F}\circ d\vec{S}-\iint\limits_K\vec{F}\circ d\vec{S}=|V|-0=|V|=\ldots=\frac{\pi}{2}$ □

Twierdzenie. (Stokes'a) Niech S będzie powierzchnią (kawałkami gładką) o brzegu Γ (kawałkami gładkim) i niech orientacja na Γ będzie zgodna z orientacją S. Niech pole wektorowe $\vec{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$ określone na $S\cup\Gamma$ będzie C^1 gładkie. Wtedy

$$\boxed{\int\limits_\Gamma\vec{F}\circ d\vec{r}=\iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F}\circ d\vec{S}\ .}$$

W innej notacji:

$$\int\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Przykład. Dla okręgu $\Gamma=\{(x,y,0):x^2+y^2=4\}$ z orientacją 'przeciwzegarową' (patrząc z dodatniej półosi OZ) i pola $\vec{F}(x,y,z)=(y^2,xy,-2xz)$, całkę krzywoliniową zorientowaną $J=\int_\Gamma\vec{F}\circ d\vec{r}=\int_\Gamma y^2\,dx+xy\,dy-2xz\,dz$ obliczymy na 3 sposoby:

— korzystamy z parametryzacji $\Gamma: x(t)=2\cos t,\ y(t)=2\sin t,\ z(t)=0,\ 0\le t\le 2\pi$:

$$J=\int_0^{2\pi}y^2\cdot x'+xy\cdot y'-2xz\cdot z'\,dt=\int_0^{2\pi}4\sin^2 t\cdot(-2\sin t)+4\cos t\sin t\cdot 2\cos t-0\,dt=$$

$$=-8\cdot\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt-\frac{8}{3}\cdot\int_0^{2\pi}3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\,dt=-8\cdot 0-\frac{8}{3}\cdot\left[\cos^3 t\right]_0^{2\pi}\ dt=0,$$

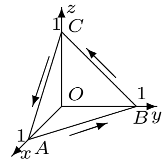
— korzystamy z tw. Stokes'a: Γ jest brzegiem półsfery $S: z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ z orientacją 'do góry', obliczamy $\operatorname{rot}\vec{F}=(0,2z,-y)$ (zamieniamy dalej na całkę podwójną):

$$J=\iint\limits_S\operatorname{rot}\vec{F}\circ d\vec{S}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}-0\cdot\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}-2\sqrt{4-x^2-y^2}\cdot\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}-y=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}y=0,$$

— korzystamy z tw. Stokes'a: Γ jest brzegiem koła $S'=\{(x,y,0):x^2+y^2\le 4\}$ z orientacją $[0,0,1]$, obliczamy $\operatorname{rot}\vec{F}=(0,2z,-y)$ i z def. całki pow. zorient. mamy:

$$J=\iint_{S'}\operatorname{rot}\vec{F}\circ d\vec{S}=\iint_{S'}(0,2z,-y)\circ(0,0,1)\,dS=\iint_{S'}-y\,dS=\{\text{z symetrii}\}=0.$$

Ponadto: dla dowolnej powierzchni S'' o brzegu Γ jest $\iint_{S''}0\,dydz+2z\,dzdx-y\,dxdy=0$, co wynika też z tw. Gaussa-Ostrogradzkiego (jak?).



Przykład. Stosując tw. Stokes'a dla łamanej $ABCA$, gdzie $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ i $\vec{F}=(yx,x^3y,2z)$ mamy $\operatorname{rot}\vec{F}=(0,0,3x^2y-x)$ i

$$J=\int\limits_{ABCA}yx\,dx+x^3y\,dy+2z\,dz=\iint\limits_{ABC}(0,0,3x^2y-x)\circ(1,1,1)\frac{1}{\sqrt{3}}\,dS.$$

Inaczej: łamana ta jest brzegiem pow. $S=ABO\cup BCO\cup AOC$ więc (też z Stokes'a)

$$J=\iint\limits_S\operatorname{rot}\vec{F}\circ d\vec{S}=\iint\limits_{ABO}\operatorname{rot}\vec{F}\circ(0,0,1)dS+\iint\limits_{BCO}\operatorname{rot}\vec{F}\circ(1,0,0)dS+\iint\limits_{AOC}\operatorname{rot}\vec{F}\circ(0,1,0)dS=$$

$$=\iint\limits_{ABO}3x^2y-x\,dS+0+0=\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}3x^2y-x\,dydx=\int\limits_0^1\frac{3}{2}x^2(1-x)^2-x(1-x)\,dx=\frac{-7}{60}.$$

Przykład. Jeśli dla pow. $S=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^6=1,z\ge 0\}$ zorientowanej 'ku górze', mamy obliczyć $\iint_S\operatorname{rot}\vec{F}\circ d\vec{S}$, gdzie $\vec{F}=((z+1)y^3,-(z+1)xy,e^{x^2y^2})$, to zauważmy, że brzeg S jest okręgiem $\Gamma: x(t)=\cos t,\ y(t)=\sin t,\ z(t)=0,\ 0\le t\le 2\pi$:

$$\iint\limits_S\operatorname{rot}\vec{F}\circ d\vec{S}=\int\limits_\Gamma\vec{F}\circ d\vec{r}=\int\limits_0^{2\pi}(z+1)y^3\cdot x'-(z+1)xy\cdot y'+e^{x^2y^2}\cdot 0\,dt=\ldots=-\frac{3}{4}\pi\ .$$