

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NO...TKI Z WYKŁADU 3.B

DEF. (wg Cauchy'ego) Dla $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ i $p_0 \in \mathbb{R}^m$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^m$, definiujemy

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{p \rightarrow p_0} f(p) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall p \in D \quad 0 < |p - p_0| < \delta \Rightarrow |f(p) - g| < \varepsilon .$$

Innymi słowy (dla $m = 2$, $p_0 = (x_0, y_0)$):

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x,y) \in D \quad 0 < \sqrt{\dots^2 + \dots^2} < \delta \Rightarrow |f(\dots) - g| < \varepsilon .$$

1. Pokażemy, że 0 jest granicą funkcji $f(x,y) = \frac{x^6 y^2}{x^4 + y^4}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$.

Zauważmy, że :

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{\dots}{x^4 + y^4} - 0 \right| = \frac{x^6 y^2}{x^4 + y^4} = \dots \cdot \frac{x^4}{x^4 + y^4} \leq x^2 y^2 \cdot 1 \leq x^2 \quad \text{dla } y^2 \leq 1$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

gdy $x \in (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon})$ i $y \in (-1, 1)$, i $(x,y) \neq (0,0)$, to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$,

czyli:

gdy $0 < |(x,y) - (0,0)| < \delta$, gdzie $\delta := \min\{\sqrt{\varepsilon}, \dots\}$, to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. \square

2. Pokażemy, że 0 jest granicą funkcji $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ w punkcie $p_0 = (0,0)$.

Zauważmy, że :

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{\dots}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{\dots}{x^2 + y^2} = \dots \cdot \frac{\dots}{x^2 + y^2} \leq \dots \cdot 1 \leq \dots$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

gdy $x \in \dots$ i $y \in (-\dots, \dots)$, i $(x,y) \neq (0,0)$, to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$,

czyli:

gdy $0 < |(x,y) - (0,0)| < \delta$, gdzie $\delta := \dots$, to $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$. \square

Definicja Cauchy'ego jest równoważna następującej ciągowej definicji Heinego:

DEF.' (wg Heinego) Niech $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ i $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Mówimy, że g jest granicą f w (x_0, y_0) , gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = g$, dla każdego ciągu $((x_n, y_n))$ punktów z D zbieżnego do (x_0, y_0) , o wyrazach różnych od (x_0, y_0) .

3a). Czy istnieje granica funkcji $f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ w punkcie $p_0 = (0, 0)$?

Dla ciągu $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ mamy $f(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) = \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Z powyższego wiemy tylko, że jeśli f ma granicę w $(0, 0)$, to ta granica jest równa 0.

Dokończymy wg definicji Cauchy'ego:

Zauważmy, że :

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right| = \dots \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \dots \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq \dots \cdot 1 + \dots \cdot 1.$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$,

gdy $0 < |(x, y) - (0, 0)| < \delta$, gdzie $\delta := \dots$, to $|f(x, y) - 0| < \varepsilon$. \square

3b). Czy istnieje granica funkcji $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$ w punkcie $p_0 = (0, 0)$?

Nie, bowiem:

dla ciągu $(\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ mamy $f(\frac{1}{n}, 0) = \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \dots$

oraz

dla ciągu $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ mamy $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \dots$.

Ponieważ te granice są różne, więc (z def. Heinego) f nie ma granicy w $(0, 0)$. \square

3c). Czy istnieje granica funkcji $f(x, y) = \frac{x^6 + y^2}{x^2 + y^2}$ w punkcie $p_0 = (0, 0)$?

.....

4). Czy istnieje granica funkcji $f(x, y) = \frac{\sin(x^6 + y^4)}{x^2 + y^2}$ w punkcie $p_0 = (0, 0)$?

Dla funkcji jednej zmiennej znamy LEMAT $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ (co wynika z reguły ...).

Dla ciągu $p_n = (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, gdzie $p_n \neq (0, 0)$, mamy

$$f(p_n) = \frac{\sin(x_n^6 + y_n^4)}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\sin(x_n^6 + y_n^4)}{x_n^6 + y_n^4} \cdot \frac{x_n^6 + y_n^4}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{\sin(x_n^6 + y_n^4)}{x_n^6 + y_n^4} \cdot (x_n^4 \cdot \frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2} + y_n^2 \cdot \frac{y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}).$$

Korzystając z Lematu i oszacowań: $\frac{x_n^2}{x_n^2 + y_n^2}, \frac{y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq 1$ mamy $f(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \cdot (0+0) = 0$,

czyli $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ (z definicji Heinego). \square

RÓŻNE OZNACZENIA

Zdanie ' $f(x, y) = \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}$ ma w $p_0 = (0, 0)$ granicę równą 0.' można zanotować na bardzo wiele sposobów, np.:

$$\lim_{p \rightarrow p_0} f(p) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$f(p) \xrightarrow{p \rightarrow p_0} 0, \quad f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0, \quad \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0, \quad \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}]{} 0.$$

PRZESTROGA

Poniższe rachunki

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0,$$

nie dowodzą, że $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ jest równa 0.

Ta granica **NIE ISTNIEJE!**

Bowiem:

dla ciągu $(\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ mamy $\frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0^2} = \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \dots$

oraz

dla ciągu $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ mamy $\frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \dots$

Ponieważ te granice są różne, więc (wg Heinego) $\frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$ nie ma granicy w $(0, 0)$. \square

Dowody poniższych twierdzeń są 'smutne' (wystarczy zastosować).

Tw. Niech $g_1 = \lim_{p \rightarrow p_0} f_1(p)$ i $g_2 = \lim_{p \rightarrow p_0} f_2(p)$. Wtedy:

$$\lim_{p \rightarrow p_0} (f_1(p) + f_2(p)) = \dots\dots$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} (f_1(p) - f_2(p)) = \dots\dots$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} (f_1(p) \cdot f_2(p)) = \dots\dots$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} 2^{f_1(p)} = \dots\dots$$

$$\lim_{p \rightarrow p_0} \sin(f_1(p)) = \dots\dots$$

Jak pierwsze dwa 'wysławić prozą'?

A co z ilorazem?

Jak uogólnić ostatnie dwa przykłady?

