

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NO...TKI Z WYKŁADU 3.C

DEF. Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $p_0 \in D$, gdy ma w nim granicę równą $f(p_0)$.

Innymi słowy (dla $p_0 = (x_0, y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad \sqrt{\dots^2 + \dots^2} < \delta \Rightarrow |f(\dots) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon .$$

DEF. Funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, gdy f jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

1. Znajdź zbiór wszystkich punktów, w których f jest ciągła, gdzie

a) $f(x, y) = [x] + y$

b) $f(x, y) = \begin{cases} |x + y| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \sqrt{2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

b') $f(x, y) = \begin{cases} |x + y| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} |x + y| & \text{dla } (x, y) \in [-1, 1]^2 \\ p & \text{dla } (x, y) \notin [-1, 1]^2 \end{cases}, \quad \text{gdzie } p \in \mathbb{R} \text{ jest parametrem.}$$

ROZWIĄZANIE.

W punktach poza brzegiem kwadratu $[-1, 1]^2$ funkcja f jest oczywiście ciągła.

Dla punktów brzegu kwadratu mamy

ODP. Zbiór punktów ciągłości f (w zależności od p) jest równy:

$$\mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1]^2 \setminus (-1, 1)^2) \text{ dla } p \notin [0, \dots],$$

$$(\mathbb{R}^2 \setminus ([-1, 1]^2 \setminus (-1, 1)^2)) \cup \{(p-1, 1), (1, p-1), (-1, 1-p), (1-p, -1)\} \text{ dla } p \in [0, \dots].$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2}-1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 5y - 6 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ROZWIĄZANIE.

Funkcja f jest oczywiście ciągła w punktach zbioru $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$, czyli poza osią OY .

Rozważmy punkt $p_0 = (0, y_0)$ osi OY .

Z jednej strony mamy:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{x} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot \frac{xy^2}{x} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow p_0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{xy^2}-1}{xy^2} \cdot y^2 = 1 \cdot y_0^2,$$

gdzie ostatnia równość wynika z LEMAT $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{e^s-1}{s} = 0$.

(Lemat jest dla funkcji jednej zmiennej i można go dowieść regułą d'H ...).

Z drugiej strony:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x=0}} 5y - 6 = 5y_0 - 6 = f(0, y_0).$$

$$\text{Zatem } f \text{ jest ciągła w } p_0 = (0, y_0) \iff y_0^2 = 5y_0 - 6 \iff y_0 \in \{2, 3\}.$$

ODP. Zbiór punktów ciągłości f jest równy: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \cup \{(0, 2), (0, 3)\}$.

$$\text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Dowody poniższych twierdzeń są 'smutne' (wystarczy zastosować).

Tw. Niech f_1 i f_2 będą ciągłe w punkcie p . Wtedy w punkcie p są ciągłe:

$$f(p) := f_1(p) \pm f_2(p),$$

$$f(p) := f_1(p) \cdot f_2(p),$$

$$f(p) := 2^{f_1(p)},$$

$$f(p) := \sin(f_1(p)).$$

Jak pierwsze dwa 'wysłowić prozą'?

A co z ilorazem?

Jak uogólnić ostatnie dwa przykłady?