# Analiza matematyczna 3. No...tki z wykładu 4a

Def. Niech $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$. Pochodne cząstkowe $f$ w punkcie $(x_0,y_0) \in D$ określamy wzorami:

$$f'_x(x_0,y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}, \quad f'_y(x_0,y_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\dots\dots}.$$

Inne oznaczenia: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Przykład A. Dla $f(x,y) = x^4y^3 + \sin(xy^2)$ mamy

$$f'_x(\pi,1) = \left(4x^3y^3 + \cos(xy^2)\cdot y^2\right)_{\substack{x=\pi\\ y=1}} = 4\pi^3 \cdot 1 + \cos(\pi)\cdot 1^2 = 4\pi^3 - 1\ ,$$

$$f'_y(\pi,1) = \left(3x^4y^2 + \cos(xy^2)\cdot 2xy\right)_{\substack{x=\pi\\ y=1}} = 3\pi^4 + \cos(\pi)\cdot 2\pi = 3\pi^4 - 2\pi.$$

Przykład B. Dla funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

w punkcie $(0,0)$ (obliczamy z definicji):

$$\lim_{h\to0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{h}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h^2} = +\infty, \text{ więc } f'_x(0,0) \text{ nie istnieje,}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\frac{0}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0.$$

a w punktach $(x,y) \neq (0,0)$ liczymy ze wzorów:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2} = x\cdot(-1)(x^2+y^2)^{-2}\cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Przykład C. Funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^4+y^4} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

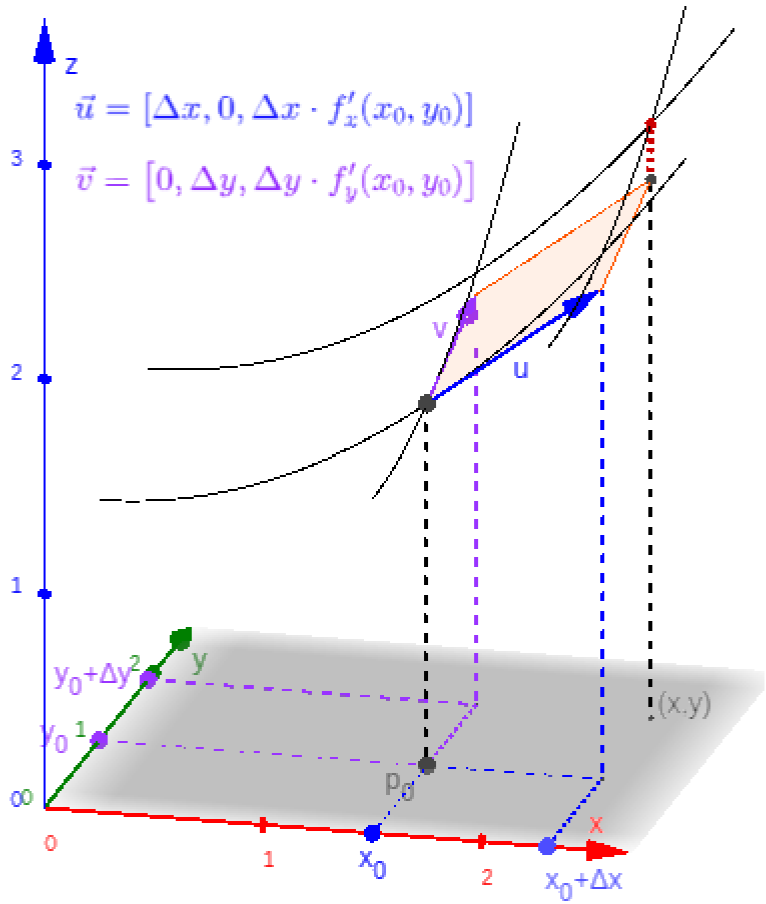
ma w każdym punkcie obie pochodne cząstkowe, bowiem:

- dla punktu $(0,0)$: obie pochodne cząstkowe są równe 0, bo:

  zauważamy, że $f$ obcięte do osi OX jest funkcją stałą (=0); tak samo dla osi OY;

- w punktach $(x,y) \neq (0,0)$ można obliczyć pochodne cząstkowe ze wzorów.

Uwaga: funkcja ta ma wszędzie obie pochodne cząstkowe ale nie jest ciągła (sprawdź).



PRZYKŁAD D. Niech $f(x,y) = \begin{cases} 2y & \text{gdy } (x,y) \in [0,2]\times[0,2] \\ 2 & \text{gdy } (x,y) \notin [0,2]\times[0,2] \end{cases}$

Ta funkcja, poza brzegiem kwadratu $K = [0,2]\times[0,2]$ ma wszędzie obie pochodne cząstkowe.

Na brzegu $K$

............

............

Zatem dziedziną $f'_x$ jest zbiór ............ ,

a dziedziną $f'_y$ jest zbiór ............ .

* * *

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu p-ktu $(x_0,y_0)$.

Równanie

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

określa *płaszczyznę styczną* do $f$ w punkcie $(x_0,y_0)$.

Zachodzi:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

czyli wartości $f$ są 'nieżle' przybliżane przez wartości bardzo prostej funkcji.

Jakość (dokładność) tego przybliżenia będziemy omawiać w przyszłości (za Taylorem).

PRZYKŁAD. Funkcja $f(x,y) = x^3 + y^4$ ma w punkcie $(x_0,y_0) = (2,1)$ płaszczyznę styczną o równaniu

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$z = 2^3 + 1^4 + (3\cdot 2^2 + 0)\cdot(x-2) + (0 + 4\cdot 1^3)\cdot(y-1),$$

$$z = 9 + 12(x-2) + 4(y-1),$$

$$z = 12x + 4y - 19.$$

PRZYKŁAD. Znaleźć płaszczyznę styczną do powierzchni $x^2 + y^2 + z = 4$, na której leżą punkty $A_1 = (3,0,5)$, $A_2 = (3,1,6)$.