Analiza matematyczna 3. No...tki z wykładu 5a

Pochodne cząstkowe $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ funkcji $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjami z podzbiorów $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$, zatem można je dalej różniczkować; każdą i po x, i po y.

Np. dla $f(x,y) = 3x^4y^2$ mamy:

$$f'_x(x,y) = 12x^3y^2, \qquad f'_y(x,y) = 6x^4y$$

oraz

$$f''_{xx}(x,y) = 36x^2y^2,\ f''_{yx}(x,y) = 24x^3y, \quad f''_{xy}(x,y) = 24x^3y,\ f''_{yy}(x,y)(x,y) = 6x^3$$

Można też liczyć pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$$f'''_{xxx}(x,y) = 72xy^2,\ f'''_{yxx}(x,y) = 72x^2y,\ f'''_{xyx}(x,y) = 72x^2y,\ f'''_{yyx}(x,y) = 24x^3, \ldots$$

To nie jest przypadek, że wiele jest równych, bowiem

Tw. Gdy f jest klasy $\mathcal{C}^2$, czyli ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, to pochodne mieszane są równe, czyli $f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y)$.

W innej notacji:

Tw. (Schwarza) Dla $f \in \mathcal{C}^2$ mamy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$.

Z tego twierdzenia wynikają równości pochodnych mieszanych wyższych rzędów (przy założeniu ich ciągłości). W szczególności:

Dla f-cji $f \in \mathcal{C}^3$ mamy cztery (co najwyżej) różne pochodne cząstkowe rzędu trzeciego:

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$,

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} =$ ....

$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} =$ ....

$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$.

Dla f-cji $f \in \mathcal{C}^4$ mamy (co najwyżej) pięć różnych pochodnych cząstkowych rzędu czwartego:

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$,

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} =$ ....

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} =$ ....

$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} =$ ....

$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$.

ZADANIE. Niech $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{gdy } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{gdy } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Wprost z definicji oblicz:

$f'_x(0,y) =$ .... $f'_y(x,0) =$ ....

$f''_{yx}(0,0) =$ .... $f''_{xy}(0,0) =$ ....

Zatem ....