Analiza matematyczna 3. No...tki z wykładu 5b

Przykład. Niech $\Phi = \Phi(m, r) = G\dfrac{M \cdot m}{r^2}$.

Okazuje się jednak, że m, r nie są stałymi, są funkcjami: $m = m(t)$ oraz $r = r(t)$.

Wtedy $F = F(t) = \Phi\left(m(t), r(t)\right) = G\dfrac{M \cdot m(t)}{\left(r(t)\right)^2}$.

Prolem(ik). Jak wyznaczyć $F' = \frac{dF}{dt}$?

$$\frac{F(t+h)-F(t)}{h} = \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} =$$

$$= \quad \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{h} \quad + \quad \frac{G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{h} =$$

$$= \frac{G\frac{M\cdot m(t+h)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2}}{m(t+h)-m(t)} \cdot \frac{m(t+h)-m(t)}{h} + \frac{G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t+h))^2} - G\frac{M\cdot m(t)}{(r(t))^2}}{r(t+h)-r(t)} \cdot \frac{r(t+h)-r(t)}{h}$$

$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} \quad \Phi'_m \quad \cdot \quad m' \quad + \quad \Phi'_r \quad \cdot \quad r'$$

Innymi znaczkami, w nieco ogólniejszej sytuacji:

Gdy $F = F(t, x, y) = \Phi\left(m(t, x, y), r(t, x, y)\right)$, to $\dfrac{d\,F}{d\,t} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \dfrac{\partial m}{\partial t} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \dfrac{\partial r}{\partial t}$.

Gdyby M nie było stałą, np. $M = M(t, x, y)$, to $\Phi = \Phi(M, m, r)$.
Wtedy wygodnie jest myśleć, że funkcje m, r formalnie też zależą od x, y (nie tylko od t). Teraz złożenie zależy od trzech zmiennych:

$$F = F(t, x, y) = \Phi\left(M(t, x, y), m(t, x, y), r(t, x, y)\right)$$

i mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial m} \cdot \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}.$$

REGUŁA ŁAŃCUCHA. (wersja) Niech $f(x,y,z),\ x(s,t),\ y(s,t),\ z(s,t)$ będą klasy $\mathcal{C}^1$.

Wtedy dla złożenia:

$$F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$$

mamy:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\ .$$

D-D. (szkic dowodu pierwszego wzoru):

$$\frac{f(x(s+h,t),y(s+h,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))}{h} = \qquad \{\text{dalej trik: } +cosik - cosik...\}$$

$$= \frac{f(x(s+h,t),y(s+h,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s+h,t),z(s+h,t))}{x(s+h,t)-x(s,t)}\cdot\frac{x(s+h,t)-x(s,t)}{h}+$$

$$+\frac{f(x(s,t),y(s+h,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s,t),z(s+h,t))}{y(s+h,t)-y(s,t)}\cdot\frac{y(s+h,t)-y(s,t)}{h}+$$

$$+\frac{f(x(s,t),y(s,t),z(s+h,t))-f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))}{z(s+h,t)-z(s,t)}\cdot\frac{z(s+h,t)-z(s,t)}{h} =$$

$$\underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'_x(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot x'_s(s,t)+$$

$$+f'_y(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot y'_s(s,t)+$$

$$+f'_z(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\cdot z'_s(s,t).$$

Szczegóły uzupełniają: tw. Lagrange'a i założenia ciągłości. □

PRZYKŁAD. Niech $f(x,y,z) = x+xy^2z^3,\ x(s,t) = s+t^2,\ y(s,t) = s^2-t,\ z(s,t) = st$ i $F(s,t) = f(x(s,t),y(s,t),z(s,t))$. Wtedy można podstawić i bardzo mozolnie obliczać F'_s i F'_t.

Powyższa reguła pozwala niemal automatycznie podać:

$$F'_s = f'_x\cdot x'_s + f'_y\cdot y'_s + f'_z\cdot z'_s = (1+y^2z^3)\cdot(1) + (2xyz^3)\cdot(2s) + (3xy^2z^2)\cdot(t) =$$

i dalej wstawiamy za x,y,z:

$$= (1+(s^2-t)^2(st)^3) + 2(s+t^2)(s^2-t)(st)^3\cdot 2s + 3(s+t^2)(s^2-t)^2(st)^2\cdot t.$$

$F'_t =$ ....

Przykład. Niech $z = ue^v + ve^{-u}$; $u = \ln r$, $v = s \cdot \ln r$. Wtedy

$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = (e^v - ve^{-u}) \cdot \frac{1}{r} + (ue^v + e^{-u}) \cdot \frac{s}{r} =$ ......

$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} = (e^v - ve^{-u}) \cdot 0 + (ue^v + e^{-u}) \cdot \ln r =$ ......

Przykład. Udowodnij: jeśli $z = \dfrac{y}{y^2 - a^2 \cdot x^2}$, to $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Wskazówka. Wystarczy rachować.