Analiza matematyczna 3. No...tki z wykładu 6b

Def. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$. Mówimy, że

$$f \text{ osiąga (ma) w } p_0 \text{ lokalne maksimum, gdy } \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{p\in D\\ ||p-p_0||<\delta}}{\forall} \ f(p) \le f(p_0),$$

$$f \text{ osiąga (ma) w } p_0 \text{ lokalne minimum, gdy } \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{\substack{p\in D\\ ||p-p_0||<\delta}}{\forall} \ f(p) \ge f(p_0).$$

Uwaga. Przy TEJ definicji funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2$ ma w $p_0 = (1,4)$ zarówno maksimum lokalne, jak i minimum lokalne!

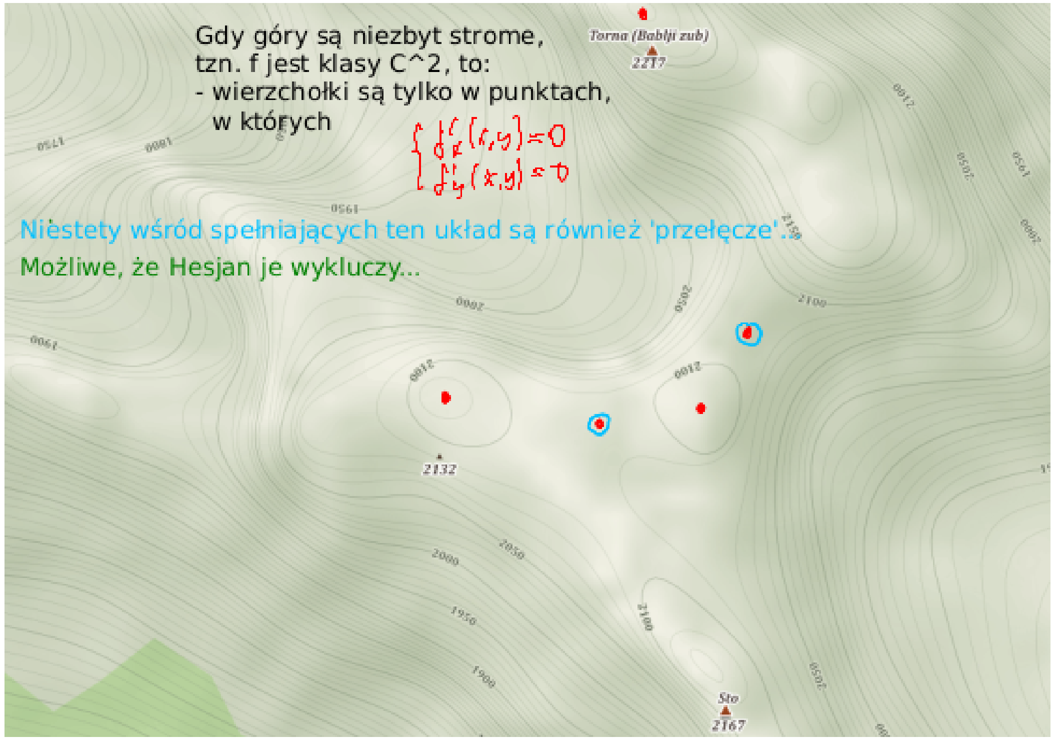
Tw. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ osiąga lokalne ekstremum w $p_0 = (x_0,y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$.

Jeśli istnieje $f'_x(p_0)$, to jest równa 0.

Jeśli istnieje $f'_y(p_0)$, to jest równa 0.

Dowód. Wystarczy zbadać obcięcia: $f|_{(\mathbb{R}\times\{y_0\})\cap D}$ i $f|_{(\{x_0\}\times\mathbb{R})\cap D}$.

Wniosek. $f : D \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$może mieć ekstremum lokalne tylko w punktach spełniających układ równań $\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$.



Twierdzenie.
Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^2$ w otoczeniu $p_0 = (x_0,y_0) \in D \subset \mathbb{R}^2$ oraz $f'_x(p_0) = 0$ i $f'_y(p_0) = 0$. Niech $H := \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(p_0) & f''_{yx}(p_0) \\ f''_{xy}(p_0) & f''_{yy}(p_0) \end{pmatrix}$ (zwany hesjanem). Wtedy:

jeśli $H > 0$ i $f''_{xx}(p_0) > 0$, to f osiąga minimum lokalne w p_0,

jeśli $H > 0$ i $f''_{xx}(p_0) < 0$, to f osiąga maksimum lokalne w p_0,

jeśli $H < 0$, to f nie ma ekstremum lokalnego w p_0,

Jeśli $H = 0$, to twierdzenie to nie rozstrzyga, czy f ma, czy nie ma ekstremum lokalne w p_0.

Dowód. (idea) Zajmiemy się tylko przypadkiem: $H < 0$.

Znak różnicy wartości:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x \cdot (x - x_0) + f'_y \cdot (y - y_0) + R_2 = \quad \text{(z Tw. Taylora)}$$
$$= 0 + R_2 = \quad \text{(bowiem ....)}$$
$$= \tfrac{1}{2} \left(f''_{xx} \cdot (x - x_0)^2 + 2 f''_{yx} \cdot (x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy} \cdot (y - y_0)^2 \right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(y - y_0)^2 \left(f''_{xx} \cdot \left(\tfrac{x-x_0}{y-y_0}\right)^2 + 2 f''_{yx} \cdot \left(\tfrac{x-x_0}{y-y_0}\right) + f''_{yy} \right)$$

zależy od znaku wyrażenia w nawiasie, które jest 'prawie funkcją kwadratową' zmiennej $\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)$. Wyróżnik ($\Delta$) tej 'prawie funkcji kwadratowej' jest równy

$$(2 \cdot f''_{xy})^2 - 4 \cdot f''_{xx} \cdot f''_{yy} = -4(f''_{xx} \cdot f''_{yy} - (f''_{xy})^2) = -4 \det \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = -4H > 0.$$

Dla (x,y) bliskich (x_0,y_0) owa 'zmienna' $\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)$ przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste. Zatem ta 'prawie funkcja kwadratowa' przyjmuje wartości i dodatnie, i ujemne. Czyli znak różnicy $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ dla pewnych (x,y) jest dodatni, a dla innych – ujemny.

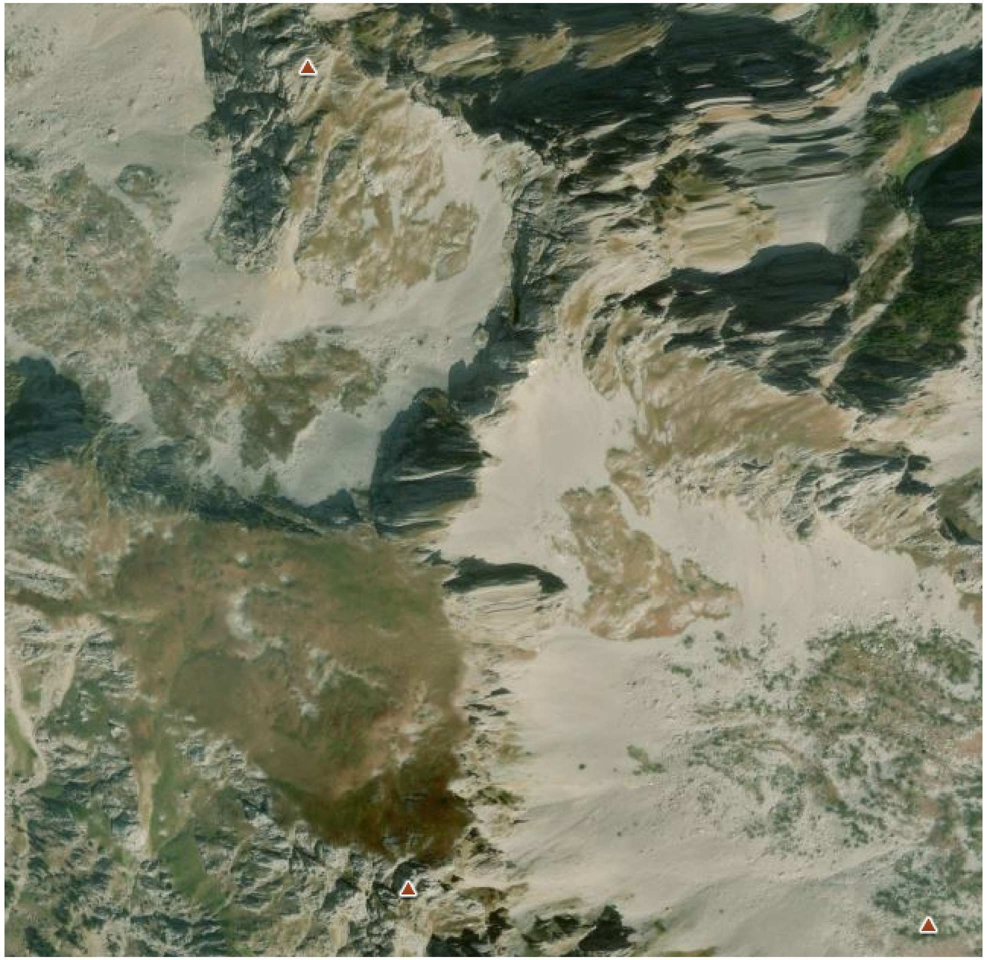
Zatem w pobliżu (x_0,y_0) są:
– zarówno punkty (x,y), w których wartości $f(x,y) > f(x_0,y_0)$,
– jak i punkty (x,y), w których wartości $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

Stąd f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0,y_0).

Uwaga. Dlaczego powyższe nie jest dowodem?

.

Poprzednia mapa jest dużo bardziej czytelna od zdjęcia z góry (samolotowego):



Przykład 1. Funkcja $f(x,y) = x^3 - x + xy^2$ jest klasy $\mathcal{C}^2$, więc ekstrema lokalne MOŻE mieć TYLKO w punktach spełniających układ równań:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-1+y^2=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} y=\pm 1 \\ x=0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y=0 \end{cases} \right),$$

czyli w $p_1 = (0,1)$, $p_2 = (0,-1)$,

$p_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ lub $p_4 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

Obliczmy hesjan: $H = \det \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 12x^2 - 4y^2$.

Dla $p_1 = (0,1)$ i $p_2 = (0,-1)$ mamy $H = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1 < 0$, zatem f nie ma ekstremum lokalnego ani w p_1, ani w p_2.

Dla $p_3 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$: $H = \frac{12}{3} > 0$ i $f''_{xx}(p_3) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, zatem f ma minimum lokalne w p_3.

Dla $p_4 = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, 0)$: $H = \frac{12}{3} > 0$ i $f''_{xx}(p_4) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$, zatem f ma maksimum lokalne w p_4.

* * *

Przykład 2. Dla funkcji $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 14$
BEZ Tw. można pokazać, że f ma jedyne ekstremum lokalne w $(2,3)$, bo geometria mówi, że funkcja ta mierzy kwadrat odległości punktu (x,y) od $(2,3)$ powiększony o 1 (zbliżając/oddalając się do/od $(2,3)$ zmniejsza/zwiększa się wartość f).

* * *

Przykład 3. Dla funkcji $f(x,y) = x^3 - x + y^3$
BEZ rachunków można pokazać, że nie ma ekstremów lokalnych (zob. $f|_{\{x_0\}\times\mathbb{R}}$).

Podobnie dla $g(x,y) = x^5(2 + \sin y)$, $h(x,y,z) = z^3 2^{xy}$.

* * *

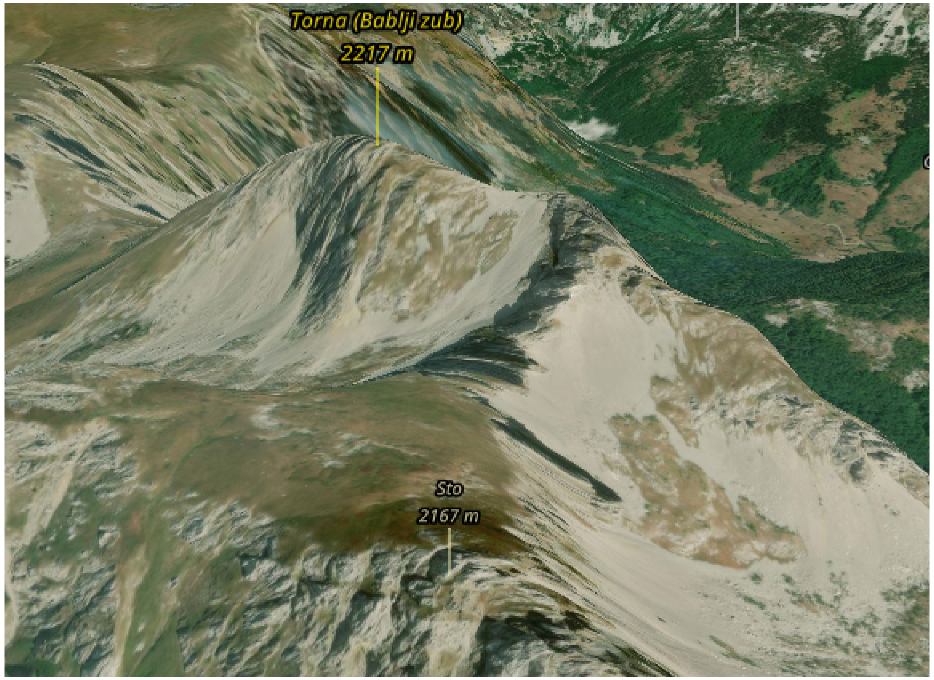
Przykład 4. Funkcja $f(x,y) = \begin{cases} 3 - |x| & \text{gdy} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ p & \text{gdy} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- dla $p \in \mathbb{R}$ ma w każdym punkcie zbioru $\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ maksimum lokalne,

ponadto:

- dla $p \geq 3$ ma w $(0,0)$ maksimum lokalne,
- dla $p < 3$ ma w $(0,0)$ minimum lokalne.

Gdy (niebanalny) algorytm przerobi je na zdjęcie z perspektywy, to efekt jest bardziej czytelny:



Mapa i powyższe zdjęcia pochodzą z portalu mapy.cz .