

ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NO...TKI Z WYKŁADU 7B

- Zdanie 'funkcja $f(x, y) = 3x + 2y^2$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$ osiąga wartość najmniejszą równą -3 ' oznacza, że $\inf_K f = -3$, gdzie $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$; innymi słowy: obcięcie $f|_K$, ma kres dolny wartości równy -3 .

Można to uzasadnić bez użycia Analizy 3; wystarczy z warunku wyznaczyć y^2 i zbadać pomocniczą funkcję $p(x) = 3x + 2(1 - x^2)$ **na przedziale** $[-1, 1]$ (dlaczego?).

W terminologii znanej i poza matematyką powyższe zadanie wygląda tak:

ZAD. A.

Zminimalizować $f(x, y) = 3x + 2y^2$ przy warunku $g(x, y) = 0$, gdzie $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

TWIERDZENIE. (metoda mnożników nieoznaczonych Lagrange'a)

Niech funkcje $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ będą klasy \mathcal{C}^1 w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$,

Niech gradienty $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$ są wektorami niezerowymi i niech $g(p_0) = 0$.

Jeśli $f|_{g=0}$ ma w p_0 ekstremum (lok. lub globalne), to $\nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$ są równoległe.

Innymi słowy: istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0)$.

WNIOSEK. ($n = 3$) Niech $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mają wszędzie ciągłe, niezerowe gradienty i niech $W = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$.

Wtedy $f|_W$ może mieć ekstrema tylko w punktach (x, y, z) spełniających układ równań:

$$\begin{cases} f'_x(x, y, z) = \lambda \cdot g'_x(x, y, z) \\ f'_y(x, y, z) = \lambda \cdot g'_y(x, y, z) \\ f'_z(x, y, z) = \lambda \cdot g'_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ZAD.A. C.D.

Zminimalizować $f(x, y) = 3x + 2y^2$ przy warunku $g(x, y) = 0$, gdzie $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Oczywiście okrąg jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągalne; wystarczy więc z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \cdot 2x \\ 4y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots \\ y = 0 \text{ lub } \lambda = 2 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \right).$$

Zatem $f(1, 0) = 3$, $f(-1, 0) = -3 = \inf f|_{g=0}$, $f(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}) = f(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{7}}{4}) = \frac{25}{8} = \sup f|_{g=0}$.

UWAGA. Tu 'strategia' rozwiązywania układu równań jest następująca:

- 'jak najszybciej pozbywamy się owej zmiennej λ ',
- nie dbamy o równoważności, potrzebne nam są implikacje \Rightarrow (w szczególności nie interesuje nas owa λ),
- twierdzenie nie przesądza, czy w znalezionym rozwiązaniu jest ekstremum, potrzeba to jakoś inaczej rozstrzygnąć (np. przy szukaniu globalnego ekstremum, gdy tw.W. zapewni istnienie, to porównamy wartości f-cji w p. krytycznych).

ZAD.B. Znaleźć kresy $f(x, y, z) = x + z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Oznaczmy: $g(x, y, z) = \dots$

Oczywiście \dots jest zbiorem domkniętym i ograniczonym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągalne; wystarczy więc z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \cdot \dots \\ 0 = \lambda \cdot 2y \\ 1 = \lambda \cdot 2z \\ \dots \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \dots \\ \lambda = 0 \\ \dots \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \dots \\ y = 0 \\ \dots \end{cases} \right) \Rightarrow \dots$$

Zatem \dots

ZAD.C. Znaleźć takie dodatnie liczby x, y, z , o sumie 24, których iloczyn jest największy.

ROZWIĄZANIE.

Ponieważ $W = \{(x, y, z) : x + y + z = 24, x, y, z > 0\}$ NIE JEST domknięty (trójkąt bez boków), więc jest dramat = nie wiemy, czy funkcja $f(x, y, z) = xyz$ osiąga kres górny na W !

Pomysł:

zbadam $\hat{f}(x, y, z) = xyz$ na zbiorze $T = \{(x, y, z) : x + y + z = 24, x, y, z \geq 0\}$.

Funkcja \hat{f} na T osiąga swe kresy (bo T jest domknięty i ograniczony; więc można użyć tw. W).

Ponieważ

dla $(x, y, z) \in T \setminus W$ mamy $\hat{f}(x, y, z) = 0$

oraz

dla $(x, y, z) \in W$ mamy $\hat{f}(x, y, z) = f(x, y, z) > 0$

więc

$\sup_T \hat{f} = \sup_W f$ i są przyjęte w tych samych punktach.

Zatem dalej wystarczy znaleźć i zbadać punkty krytyczne dla \hat{f} w zbiorze W :

$$\begin{cases} yz = \lambda \cdot 1 \\ xz = \lambda \cdot 1 \\ xy = \lambda \cdot 1 \\ x + y + z - 24 = 0 \end{cases} \xRightarrow{x, y, z > 0} \begin{cases} yz = xz \\ xz = xy \\ x + y + z = 24 \end{cases} \xRightarrow{x, y, z > 0} \dots\dots\dots$$

.....

Podobny (do Zad. C) kłopot z brakiem zwartości mamy w poniższym zadaniu:

ZAD.D. Który z punktów linii $L : x^3 + y^3 = 8$ leży najbliżej punktu $(0, 0)$?

IDEA ROZWIĄZANIA.

Zamiast badać funkcję $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ na zbiorze L , wystarczy zbadać funkcję $\hat{f}(x, y) = x^2 + y^2$ na zbiorze $L \cap \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3^2\}$ (na przykład).

ZAD.E. Znaleźć kresy $f(x, y) = xy$ przy warunku $x^4 + y^4 + x^2y^2 \leq 1$.

IDEA ROZWIĄZANIA.

Oznaczmy: $g(x, y) = x^4 + y^4 + x^2y^2 - 1$, $U = \{(x, y) : g(x, y) \leq 0\}$.

Zauważmy, że $U \subset [-1, 1]^2$, bowiem

Zatem U jest zbiorem ograniczonym.

Jest też zbiorem domkniętym, więc z tw. W. wynika, że kresy są osiągalne.

Dalej, poszukiwanie p. kryt. należy podzielić na DWA przypadki:

A) Szukam p. kryt. w zbiorze $W = \{(x, y) : g(x, y) < 0\}$ (wnętrze U):

.....

.....

B) Szukam p. kryt. w zbiorze $U \setminus W = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ (i tylko tu można zastosować metodę Lagrange'a):

.....

.....