

### ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NO...TKI Z WYKŁADU 7C

Nie można zapomnieć, że w metodzie Lagrange'a są pewne założenia, w szczególności trzeba uważać na brak różniczkowalności (np. gdy jest wartość bezwzględna):

PRZYKŁAD. A

Znajdź kresy  $f(x, y) = |x^2 + y^2 - 2y| - 6y$  na zbiorze  $W = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 9 \leq 0\}$ .

ROZWIĄZANIE. (najważniejszy jest tu plan)

Oczywiście  $f$  jest ciągła i  $W$  jest kołem, więc (z tw. W.) kresy  $f|_W$  są przyjmowane.

Zauważmy, że  $x^2 + y^2 - 2y = 0 \iff x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \iff x^2 + (y - 1)^2 = 1$  jest równaniem okręgu  $S$  zawartego we wnętrzu  $W$ .

Dalej szukamy p. kryt. w CZTERECH zbiorach:

- a) w zbiorze  $U := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$  (wnętrze koła),  
tu  $f|_U(x, y) = -(x^2 + y^2 - 2y) - 6y$ :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y - 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0, -2) \notin U$$

- b) w zbiorze  $S := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 = 1\}$  (okrąg),  
tu  $f|_S(x, y) = (0) - 6y = \tilde{f}(x, y)$  i stosujemy metodę Lagrange'a

$$\begin{cases} \tilde{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \tilde{f}'_y = \lambda \cdot 2(y - 1) \\ x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -6 = \lambda \cdot 2(y - 1) \\ x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dots\dots \\ y = \dots\dots \end{cases},$$

i dostajemy:  $p_1 = (\dots, \dots)$ ,  $p_2 = (\dots, \dots)$ .

- c) w zbiorze  $V := \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 > 1, x^2 + y^2 < 9\}$  (wnętrze 'pierścienia'),  
tu  $f|_V(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y) - 6y$ :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 8 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \dots \end{cases} \text{ brak p. kryt., bo } (0, \dots) \notin V$$

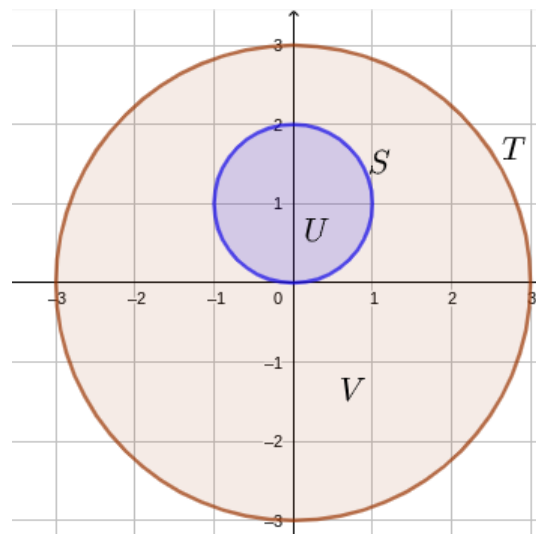
- d) w zbiorze  $T := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$  (okrąg),  
tu  $f|_T(x, y) = (x^2 + y^2 - 2y) - 6y = (9 - 2y) - 6y = \hat{f}(x, y)$  i stosujemy met. L.:

$$\begin{cases} \hat{f}'_x = \lambda \cdot 2x \\ \hat{f}'_y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x \\ -8 = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \dots\dots \\ y = \dots\dots \end{cases},$$

i dostajemy:  $p_3 = (\dots, \dots)$ ,  $p_4 = (\dots, \dots)$ .

Podsumowując:  $f(p_1) = \dots$ ,  $f(p_2) = \dots$ ,  $f(p_3) = \dots$ ,  $f(p_4) = \dots$ ,  
stąd  $\sup f[W] = \dots = f(\dots)$ ,  $\inf f[W] = \dots = f(\dots)$ .

UWAGA. W b) i d) można 'chyttrze' (bez mnożników Lagrange'a).



TWIERDZENIE. (metoda mnożników Lagrange'a)

Niech  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$  będą klasy  $\mathcal{C}^1$  w otoczeniu  $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  
niech gradienty  $\nabla f(p_0)$ ,  $\nabla g(p_0)$ ,  $\nabla h(p_0)$  są niezerowe i niech  $g(p_0) = 0$ ,  $h(p_0) = 0$ .

Jeśli  $f|_{g=0 \wedge h=0}$  ma w  $p_0$  ekstremum, (lokalne lub globalne), to wektor  $\nabla f(p_0)$  jest kombinacją liniową wektorów  $\nabla g(p_0)$  i  $\nabla h(p_0)$ ,  
czyli  $\nabla f(p_0) = \lambda \cdot \nabla g(p_0) + \mu \cdot \nabla h(p_0)$  dla pewnych  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

WNIOSEK. (przy założeniach jak wyżej)

Punkty  $(x, y, z)$ , w których  $f_{g=0 \vee h=0}$  osiąga ekstrema znajdziemy wśród rozwiązań układu:

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x + \mu \cdot h'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y + \mu \cdot h'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z + \mu \cdot h'_z \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ZAD.F. Znaleźć kresy  $f(x, y, z) = y + z$  przy warunkach  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $y^2 + z^2 = 4$ .

Niech  $g(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$ ,  $h(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4$  i  $W = \{p : g(p) = 0 \text{ i } h(p) = 0\}$ .

Jeśli  $g(x, y, z) = 0$ , to  $|x| \leq 1$  i  $|z| \leq 1$ . Jeśli  $h(x, y, z) = 0$ , to  $|y| \leq 2$  i  $|z| \leq 2$ .

Zatem punkty spełniające OBA warunki leżą w  $[-1, 1] \times [-2, 2] \times [-1, 1]$ , czyli  $W$  jest zbiorem ograniczonym. Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że  $f|_W$  osiąga swe kresy; wystarczy więc z tw. Lagrange'a badać punkty spełniające układ

$$\begin{cases} f'_x = \lambda \cdot g'_x + \mu \cdot h'_x \\ f'_y = \lambda \cdot g'_y + \mu \cdot h'_y \\ f'_z = \lambda \cdot g'_z + \mu \cdot h'_z \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 2y \\ 1 = \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + 1 = 4 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \lambda = 0 \\ 1 = \mu \cdot 2y \\ 1 = \mu \cdot 2z \\ x^2 + z^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

W drugim układzie  $\mu \neq 0$  (dlaczego?), skąd  $y = z$ . Stąd z ostatniego równania  $y^2 = z^2 = 2$ , co prowadzi do sprzeczności w przedostatnim:  $x^2 + 2 = 1$ .

Zatem punkty krytyczne dostajemy tylko z pierwszego układu:

$$p_1 = (0, \sqrt{3}, 1), p_2 = (0, -\sqrt{3}, 1), p_3 = (0, \sqrt{3}, -1), p_4 = (0, -\sqrt{3}, -1).$$

Badając sumy  $y + z$  dostajemy

$$\text{Odpowiedź: } \sup_W f = \sqrt{3} + 1 = f(p_1), \quad \inf_W f = -\sqrt{3} - 1 = f(p_4).$$

ZAD.G. Znaleźć kresy  $f(x, y, z) = y^3 + xz^2$  przy warunkach  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = y$ .

Zauważmy, że zbiór  $W = \{(x, y, z) : x - y = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$  jest .....  
czyli  $W$  jest zbiorem .....

Jest też domknięty, więc z tw. W. wynika, że  $f|_W$  osiąga swe kresy.

Zatem wystarczy (z tw. Lagrange'a) zbadać (porównać wartości  $f$ ) w rozwiązaniach układu:

$$\begin{cases} z^2 = \lambda \cdot 2x + \mu \cdot 1 \\ 3y^2 = \lambda \cdot 2y + \mu \cdot (-1) \\ 2xz = \lambda \cdot 2z + \mu \cdot 0 \\ x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{IIIr.} \left( \begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ 2y^2 + 0^2 = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z^2 = x \cdot 2x + \mu \\ 3y^2 = x \cdot 2y - \mu \\ \lambda = x \\ \dots \\ \dots \end{cases} \right) \xrightarrow{I+II} \\ \xrightarrow{I+II} \left( \begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z^2 + 3y^2 = 2x^2 + 2xy \\ \dots \\ x = y \\ \dots \end{cases} \right) \Rightarrow \left( \begin{cases} z = 0 \\ x = y \\ y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} z^2 = x^2 \\ x = y \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \right)$$

Czyli mamy 6 p. kryt. w których:

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ponieważ  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ , (bo  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \iff \sqrt{\frac{1}{8}} < \sqrt{\frac{4}{27}} \iff 27 < 32$ ), więc

$$\sup_W f = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right),$$

$$\inf_W f = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$