Analiza matematyczna A3. Dodatek do Listy 7.

Poniżej przedstawiam trzy wersje redakcji rozwiązania jednego dodatkowego zadania.

Zad. S. Niech $D = [0,4]^2$ i niech funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = x^2+2|y-x|+y^2-8y+25$. Znajdź wartość najmniejszą i wartość największą tej funkcji i podaj wszystkie argumenty, w których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie, wersja A (żmudna)
D jest .... , czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, f jest .... , więc z tw. Weierstrassa wynika, że w. największa i w. najmniejsza są przyjmowane w D.

Funkcja f jest $\mathcal{C}^1$ w zbiorze $W=(0,4)^2\setminus\{(x,x) : x\in(0,4)\}$ (wnętrze D <u>bez</u> odcinka).

$\diamondsuit_a$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x > y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = ... \\ f'_y = ... \end{cases} \quad \begin{cases} .... = ... \\ .... = ... \end{cases} \quad \begin{cases} ...... = ... \\ ...... = ... \end{cases} \quad \begin{cases} ...... = ... \\ ...... = ... \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\diamondsuit_b$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x < y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = ... \\ f'_y = ... \end{cases} \quad \begin{cases} .... = ... \\ .... = ... \end{cases} \quad \begin{cases} ...... = ... \\ ...... = ... \end{cases} \quad \begin{cases} ...... = ... \\ ...... = ... \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\heartsuit_{y=0}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x,y) : y = 0\}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x,0) = x^2+2|0-x|+0^2-8\cdot 0+25 = (x+ \ ...\ )^2 + ...$
g jest f. kwadr. rosnącą na ...... (tu mini rysunek), więc p. krytycznymi są: ......

$\heartsuit_{y=4}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x,y) : y = 4\}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(x) = f(x,...) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (x- \ ...\ )^2 + ...$
g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: $(0,4)$, $(\ ...\ ,\ ...\ )$, $(4,\ ...\ )$.

$\heartsuit_{y=x}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{(x,y) : y = x\}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(x) = f(x,x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$ ....
g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: $(0,0)$, $(...,...)$, $(4,...)$.

$\heartsuit_{x=0}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{0\} \times \mathbb{R}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(y) = f(0,y) = 0^2 + 2|y-0| + y^2 - 8y + 25 = (y-3)^2 + ...$.
g jest f. kwadratową (p. rys.), więc p. krytycznymi są: ....

$\heartsuit_{x=4}$ Punkty krytyczne w $D \cap \{4\} \times \mathbb{R}$:
Niech $g : [0,4] \to \mathbb{R}$ i $g(y) = f(4,y) = 4^2 + 2|y-4| + y^2 - 8y + 25 = (y-5)^2 + ...$.
g jest f. malejącą (p. rys.), więc p. kryt. to końce: $p_3 = (4,0)$, $p_6 = (4,...)$.

Podsumowanie: $\diamondsuit_a \cup \diamondsuit_b \cup \heartsuit$
W zbiorze wartości w p. krytycznych szukamy w. największą i najmniejszą:
$f(0,0)=$ ... , $f(4,0)=$ ... , $f(0,4)=$ ... , $f(4,4)=$ ... , ...

Odpowiedź: $\sup_D f =$ ... $= f(...,...)$ oraz $\inf_D f =$ ... $= f(...,...)$.

Zad. S. Niech $D = [0,4]^2$ i niech funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = x^2 + 2|y-x| + y^2 - 8y + 25$. Znajdź wartość najmniejszą i wartość największą tej funkcji i podaj wszystkie argumenty, w których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie, wersja B (nieco skrótowa, z wykresami zamiast rachunków)

D jest .... , czyli zbiorem ograniczonym i domkniętym, f jest .... , więc z tw. Weierstrassa wynika, że w. największa i w. najmniejsza są przyjmowane w D.

Funkcja f jest $\mathcal{C}^1$ w zbiorze W = wnętrze D <u>bez</u> odcinka o końcach ....

$\diamondsuit_a$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x > y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \ldots \\ f'_y = \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \ldots\ldots = \ldots \\ \ldots\ldots = \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \ldots\ldots = \ldots \\ \ldots\ldots = \ldots \end{cases}$$

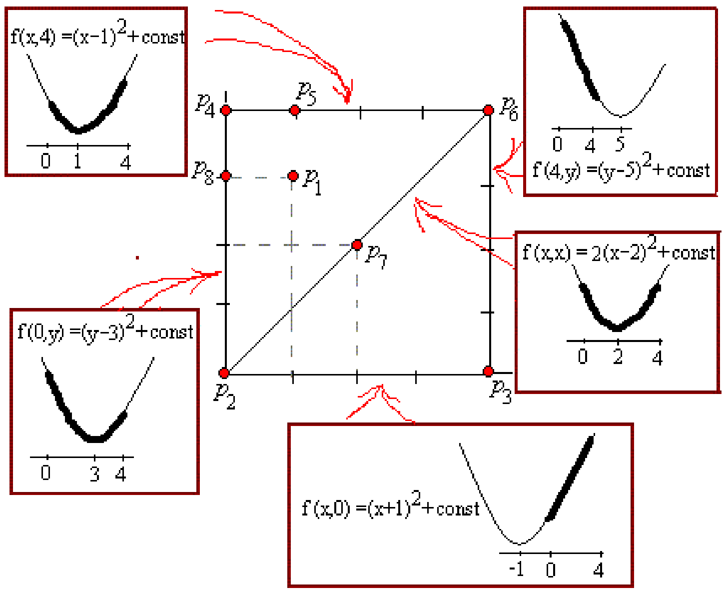
W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\diamondsuit_b$ Punkty krytyczne w $W \cap \{(x,y) : x < y\}$:

$$\begin{cases} f'_x = \ldots \\ f'_y = \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \ldots\ldots = \ldots \\ \ldots\ldots = \ldots \end{cases} \quad \begin{cases} \ldots\ldots = \ldots \\ \ldots\ldots = \ldots \end{cases}$$

W tym obszarze p. krytycznymi są: ....

$\heartsuit$ Punktami krytycznymi w $D \setminus W$ są: p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 odszukane tak, jak rysunek obok.



Podsumowanie: $\diamondsuit_a \cup \diamondsuit_b \cup \heartsuit$

W zbiorze wartości wśród p. krytycznych szukamy w. największą i najmniejszą:

$f(0,0) = \ldots$, $f(4,0) = \ldots$, $f(0,4) = \ldots$, $f(4,4) = \ldots$, ...

Odpowiedź: $\sup\limits_D f = \ldots = f(\ldots,\ldots)$ oraz $\inf\limits_D f = \ldots = f(\ldots,\ldots)$.

Zad. S. Niech $D = [0,4]^2$ i niech funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem $f(x,y) = x^2+2|y-x|+y^2-8y+25$. Znajdź wartość najmniejszą i wartość największą tej funkcji i podaj wszystkie argumenty, w których te wartości są przyjmowane.

Rozwiązanie, wersja C ('chytra' interpretacja geometryczna – zrób rysunki!)

(*i*) Dla $(x,y) \in T_d := \{(x,y) \in D : y \leq x\}$ mamy: $f(x,y) = (x+1)^2 + (y-5)^2 - 1$, czyli jest pomniejszonym o 1 kwadratem odległości punktu (x,y) od punktu $(-1,5)$. Zatem na trójkącie T_d (p.rys.) f przyjmuje w $(2,2)$ wartość najmniejszą $(= (3\sqrt{2})^2 – 1)$ oraz przyjmuje w $(4,0)$ wartość największą (= ......).

(*ii*) Dla $(x,y) \in T_g := \{(x,y) \in D : x \leq y\}$ mamy: $f(x,y) = (x-1)^2+(y-3)^2+15$, czyli jest powiększonym o 15 kwadratem odległości punktu (x,y) od $(1,3)$. Zatem (p.rys.) $\inf\limits_{p \in T_g} f(p) = f(1,3) = 0^2 + 15 = 15$ oraz $\sup\limits_{p \in T_g} f(p) = f(0,0) = f(4,4) = \;\ldots\;$.

Odp. Porównując wartości f z (*i*) i (*ii*): $\inf\limits_D f = f(\ldots,\ldots) = \ldots$, $\sup\limits_D f = f(\ldots,\ldots) = \ldots$

Uwaga.
Tekst w (*i*) nie jest wystarczający. Na rysunku TRZEBA jakoś uzasadnić, że odległość punktu $(-1,5)$ od $(4,0)$ jest większa niż od $(0,0)$ (i od $(4,4)$).
Jak na tym rysunku zaznaczyć, że wśród punktów trójkąta T_d punkt $(2,2)$ leży najbliżej $(-1,5)$?

Uwaga.
W powyższej redakcji podpunkty (*i*) i (*ii*) nie są zredagowane jednolicie tylko dlatego, by pokazać różne możliwości. ('Proza' z (*i*) wydaje się być bardziej czytelna.)