ANALIZA MATEMATYCZNA 3. NO...TKI Z WYKŁADU 8B

TW. 2. (o istnieniu funkcji uwikłanej, wersja z)

Niech $F : D \to \mathbb{R}$ będzie klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu punktu $p_0 \in D \subset \mathbb{R}^3$ i niech $F(p_0)=0$.

Jeśli $F'_z(p_0) \neq 0$, to istnieje otoczenie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (c, d) \subset D$ punktu $p_0$ i funkcja $\varphi : (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \to (c, d)$ taka, że

(*) $F(x, y, z) = 0 \iff z = \varphi(x, y)$, dla wszystkich $(x, y, z) \in (a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times(c, d)$.

Ponadto

$$\varphi'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \varphi'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \text{dla } z=\varphi(x, y),\ (x, y) \in (a_1, b_1)\times(a_2, b_2).$$

UWAGA. Z (*) wynika tożsamość

$$F\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0, \quad \text{dla wszystkich } (x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2).$$

**4.** Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z^3+y^2=16+xyz$ w $(1, 4, 2)$.

Dla $F(x, y, z) = z^3+y^2-16-xyz$ obliczamy $F'_x(x, y, z) = -yz$, $F'_y(x, y, z) = 2y - xz$, $F'_z(x, y, z) = 3z^2 - xy$. Ponieważ $F'_z(1, 4, 2) = 3 \cdot 2^2 - 1 \cdot 4 = 8 \neq 0$, więc w pewnym otoczniu punktu $(1, 4, 2)$ powierzchnia jest wykresem funkcji uwikłanej $z = \varphi(x, y)$.

Stąd mamy $\varphi'_x(1, 4) = -\frac{-4\cdot 2}{3\cdot 2^2-1\cdot 4} = 1$, $\varphi'_y(1, 4) = -\frac{2\cdot 4-1\cdot 2}{3\cdot 2^2-1\cdot 4} = -\frac{3}{4}$,

skąd dostajemy równanie pł. stycznej: $z = 2 + 1 \cdot (x - 1) - \frac{3}{4}(y - 4)$.

**5.** Powierzchnia $P$ ma równanie $4x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 8yz = 4xy + 4xz + 3$. Wiedząc, że $P$ ma kształt elipsoidy, wyznacz jej punkt o największej zetowej współrzędnej.

Niech $F(x, y, z) = 4x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 4xy - 4xz + 8yz - 3$.

Mamy $F'_x(x, y, z) = 8x-4y-4z$, $F'_y(x, y, z) = 14y-4x+8z$, $F'_z(x, y, z) = 14z-4x+8y$.
Układ równań

$$\begin{cases} -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = 0 \\ -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F'_x(x, y, z) = 0 \\ F'_y(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y - 4z = 0 \\ 14y - 4x + 8z = 0 \\ 4x^2+7y^2+7z^2+8yz=4xy+4xz+3 \\ 14z - 4x + 8y \neq 0 \end{cases}$$

ma dwa rozwiązania $p_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $p_2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ (żmudnie!).

**Dlaczego** szukanym punktem jest $\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$?