Analiza matematyczna 3, No...tki z wykładu 9a $\iint\limits_P f,\ \iiint\limits_V f$

Co to jest całka podwójna [potrójna]?

Przykład 1. $\iint\limits_P f$, gdzie $f(x,y) = [x-y]$ i P jest trapezem $(2,0)(4,0)(4,4)(2,2)$.

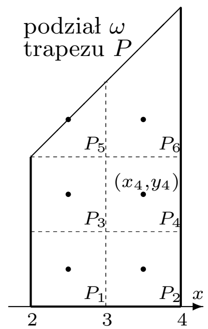
Zbiór $P = [2,4]\times[0,4]\cap\{(x,y) : y \le x\}$ można podzielić na skończenie wiele zbiorów o rozłącznych wnętrzach. (Można to zrobić na wiele sposobów.)

Rozważmy podział $\omega = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$, gdzie

$P_1 = [2,3]\times[0,1]$, $P_2 = [...,4]\times[...,...]$,

$P_3 = [2,3]\times[...,...]$, $P_4 = [...,...]\times[1,2]$,

$P_5 = [2,3]\times[2,3]\cap P$, $P_6 = [3,4]\times[2,4]\cap P$.



Pola tych zbiorów są równe: $\Delta p_1 = \Delta p_2 = \Delta p_3 = \Delta p_4 = 1$, $\Delta p_5 = 0.5, \Delta p_6 = ...$. Oczywiście pole $P = \sum_i \Delta p_i$.

W każdym zbiorze P_i wybierzmy po (jednym) punkcie (x_i, y_i); np. $(\frac{5}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{5}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$, $(\frac{7}{2},\frac{5}{2})$.

Dla funkcji $f(x,y) = [x-y]$, podziału ω z wybranymi punktami (x_i, y_i), obliczamy:

$$\sigma_\omega := \sum_{i=1}^{6} f(x_i, y_i)\cdot\Delta p_i =$$

$$= [\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{5}{2}-\tfrac{3}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{7}{2}-\tfrac{3}{2}]\cdot 1 + [\tfrac{5}{2}-\tfrac{5}{2}]\cdot\tfrac{1}{2} + [\tfrac{7}{2}-\tfrac{5}{2}]\cdot\tfrac{3}{2} = 9\tfrac{1}{2}.$$

$$s_\omega := \sum_{i=1}^{...}\Big(\inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\Big) = 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot\tfrac{1}{2} + 0\cdot\tfrac{3}{2} = \ ...\ ,$$

$$S_\omega := \sum_{i=1}^{6}\Big(\sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\ \cdot\Delta p_i\Big) = 3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot\tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{3}{2} = 15\tfrac{1}{2}\ .$$

Przy innym wyborze punktów (np. zmieniając tylko $(x_2, y_2) = (4,0)$) możemy dostać inną liczbę σ_ω (w tym przypadku $10\frac{1}{2}$) ale zawsze między liczbami s_ω i S_ω.

Obserwacja. $\quad s_\omega \le \sigma_\omega \le S_\omega \quad$ (całkiem ogólnie).

Terminologia:

s_ω — suma dolna,
S_ω — suma górna,
σ_ω — suma Riemanna

dla zadanej funkcji f, zbioru P, jego podziału ω i punktów z elementów podziału.

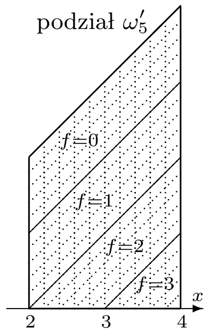
Intuicja: Gdy podział jest 'drobny', to owe trzy sumy są bliskie.
Gdy owe podziały są 'coraz drobniejsze', to coraz lepiej przybliżają $\iint\limits_P f$.

Przykład 1. c.d.

Dla tej funkcji $f(x,y) = [x-y]$ i trapezu P można rozważać 'wygodniejsze' podziały: mianowicie dla **ustalonej** liczby naturalnej n proste o równaniach postaci

$$y = x + \tfrac{k}{n}, \qquad x = \tfrac{k}{n}, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

dzielą P na równoległoboki i trójkąty (na rys. $n = 5$) wyznaczając podział ω_n'.



Gdy wszystkie punkty (x_i, y_i) są wybrane z **wnętrz** P_i, to łatwo zliczamy (wskazówka: zsumuj pola takich P_i, że $f(x_i,y_i) = 2$):

$$\sigma_{\omega_n'} = \sum_i f(x_i,y_i)\cdot \Delta p_i = 3\cdot\tfrac{1}{2} + 2\cdot\tfrac{3}{2} + 1\cdot 2 + 0\cdot 2 = 6\tfrac{1}{2}$$

Podobnie $\quad s_{\omega_n'} = \sum\limits_i \inf\limits_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i = 6\tfrac{1}{2}$.

Zaznacz te P_i, na których f nie jest stała. Widać wtedy, że

$$S_{\omega_n'} = \sum_i \sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y)\cdot\Delta p_i =$$
$$= 6\tfrac{1}{2} + 1\cdot\tfrac{2}{n} + 1\cdot\tfrac{2}{n} + 1\cdot\left(\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{2n^2}\right) + 1\cdot\tfrac{1}{2n^2} = 6\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{n} + \tfrac{1}{n^2}.$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $\sigma_{\omega_n'}, s_{\omega_n'}, S_{\omega_n'}$ są niemal $6\frac{1}{2} = \iint\limits_P f$.

Przykład 2.

Dla $f(x,y) = \frac{y}{x}$ podziały ω_n'' trapezu P prostymi: $y = \frac{k}{n}x$, $x = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ dają:

$$s_{\omega_n''} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k-1}{n}\cdot\tfrac{6}{n} = 3\cdot\tfrac{n-1}{n},$$

$$S_{\omega_n''} = \sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{n}\cdot\tfrac{6}{n} = 3\cdot\tfrac{n+1}{n},$$

więc $\quad \iint\limits_P \dfrac{y}{x} = 3.$

UWAGA. Dla innych funkcji 'wygodne' są inne podziały P;

np. dla $f(x,y) = (2x-y)^3$ – podział prostymi: $y = 2x + \frac{k}{n}$, $x = \frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dla $f(x,y) = 2x + y^3$ trudno o 'wygodny' podział; później zobaczymy jak rachunek całkowy 'załatwia' ten problem.

PRZYKŁAD. $\iint\limits_P f$ gdzie $f(x,y) = x^2 + y^2$ i P – koło o środku $(0,0)$ i promieniu R.

Dla ustalonego n dzielimy koło na n pierścieni; tworzymy podział $\omega_n = \{P_1, \ldots, P_n\}$:

dla $1 \le k \le n$, niech

$$P_k = \{(x,y) : R\sqrt{\tfrac{k-1}{n}} \le \sqrt{x^2+y^2} \le R\sqrt{\tfrac{k}{n}}\} \qquad \text{(zrób rysunek).}$$

Ich pola są równe $\Delta p_k = \pi(R\sqrt{\frac{k}{n}})^2 - \pi(R\sqrt{\frac{k-1}{n}})^2 = ... = \frac{1}{n}\pi R^2$,

skąd

$$s_{\omega_n} = \sum_{k=1}^{n} R^2 \tfrac{k-1}{n} \cdot \tfrac{\pi R^2}{n} = \tfrac{n-1}{n} \cdot \tfrac{1}{2}\pi R^4 \ ,$$

$$S_{\omega_n} = \sum_{k=1}^{n} R^2 \tfrac{k}{n} \cdot \tfrac{\pi R^2}{n} = \tfrac{n+1}{n} \cdot \tfrac{1}{2}\pi R^4 \ .$$

Zatem dla 'dużych' n wielkości $s_{\omega_n}, S_{\omega_n}$ są niemal równe $\frac{1}{2}\pi R^4 = \iint\limits_{||(x,y)|| \le R} x^2 + y^2$.

DEFINICJA. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym P. Dla podziału $\omega = \{P_1, \dots P_m\}$ zbioru P na zbiory o rozłącznych wnętrzach i przy wyborze z nich punktów $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i, \; s_\omega = \sum_{i=1}^m \inf_{(x,y)\in P_i} f(x,y) \cdot \Delta p_i, \; S_\omega = \sum_{i=1}^m \sup_{(x,y)\in P_i} f(x,y) \cdot \Delta p_i,$$

gdzie $\Delta p_i =$ pole zbioru P_i.
Rozważając **wszystkie** podziały określamy:

$$\underline{\iint_P} f := \sup_\omega s_\omega \text{ – całka dolna}, \quad \overline{\iint_P} f := \inf_\omega S_\omega \text{ – całka górna}.$$

Gdy są równe, to tę liczbę nazywamy całką f na zbiorze P i piszemy $\iint_P f$.

Innymi 'znaczkami':

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \cdot \Delta p_i, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^m \inf_{P_i} f \cdot \Delta p_i, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^m \sup_{P_i} f \cdot \Delta p_i$$

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \cdot |P_i|, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^m \inf f[P_i] \cdot |P_i|, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^m \sup f[P_i] \cdot |P_i|$$

OBSERWACJA. Niech ω', ω'' będą dwoma podziałami zbioru P.
Istnieje podział $\bar\omega$ będący ich wspólnym rozdrobnieniem

i zachodzą nierówności:

$$s_{\omega'} \;\ldots\ldots\; s_{\bar\omega} \;\ldots\ldots\; S_{\bar\omega} \;\ldots\ldots\; S_{\omega'} \;,$$

$$s_{\omega''} \;\ldots\ldots\; s_{\bar\omega} \;\ldots\ldots\; S_{\bar\omega} \;\ldots\ldots\; S_{\omega''} \;.$$

$$s_{\omega'} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; S_{\omega''} \;.$$

Dla $\omega' = \{P'_1, \dots, P'_i, \dots, P'_{m'}\}$ i $\omega'' = \{P''_1, \dots, P''_j, \dots, P''_{m''}\}$ owe wspólne rozdrobnienie $\bar\omega$ jest złożone ze wszystkich przekrojów $P'_i \cap P''_j$ o niepustych wnętrzach, (zrób rysunek).

Zatem

OBSERWACJA. Dla dowolnych podziałów ω', ω'' mamy: $s_{\omega'} \le \underline{\iint_P} f \;\le\; \overline{\iint_P} f \le S_{\omega''}$.

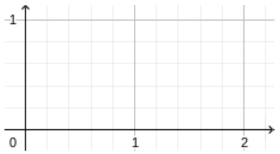
PRZYKŁAD. Są funkcje, dla których całka nie istnieje, np. dla funkcji $f(x,y) = 0$ gdy $x \in \mathbb{Q}$ i $f(x,y) = 1$ gdy $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dla zbioru $P = [1,3] \times [1,3]$ i dowolnego podziału ω jest: $s_\omega = \sum_{i=1}^m 0 \cdot \Delta p_i = 0$, $S_\omega = \sum_{i=1}^m 1 \cdot \Delta p_i = 4$, więc $\underline{\iint_P} f = 0 \ne 4 = \overline{\iint_P} f$.

Przykłady.

Niech $P = [0,2]\times[0,1]$ i dla $n \in \mathbb{N}$ niech ω_n oznacza podział P na $2\cdot n^2$ przystających kwadratów.

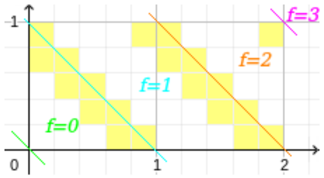
$f_1(x,y) = [x]$ jest całkowalna na P, bo dla podziałów ω_n mamy:

$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

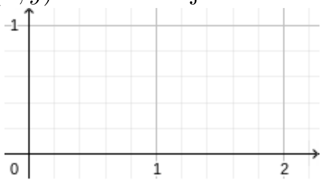


$f_2(x,y) = [x+y]$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów

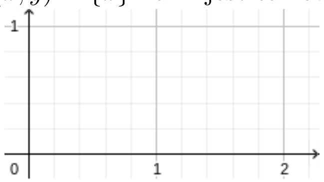
$$S_{\omega_n} - s_{\omega_n} = \frac{2n-1}{n^2}\cdot(1-0) + \frac{2n}{n^2}\cdot(2-1) + \frac{1}{n^2}\cdot(3-2) = \frac{4}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$



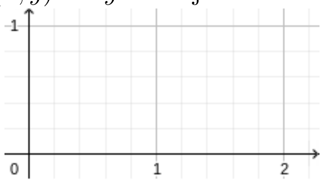
$f_3(x,y) = x^5$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów: $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} =$ ....



$f_4(x,y) = \{x\}$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów: $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} =$ ....



$f_5(x,y) = xy$ na P jest całkowalna, bo dla tych podziałów: $S_{\omega_n} - s_{\omega_n} =$ ....



Spostrzeżenia.

- $S_\omega - s_\omega = \left(\sum_i \sup_{P_i} f \cdot |P_i|\right) - \left(\sum_i \inf_{P_i} f \cdot |P_i|\right) = \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f)\cdot |P_i|.$
- Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i| = p$,
  to $\quad S_\omega - s_\omega = p \cdot \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f).$
- Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup_{P_i} - \inf_{P_i} = c$,
  to $\quad S_\omega - s_\omega = c \cdot \sum_i |P_i| = c \cdot |P|.$