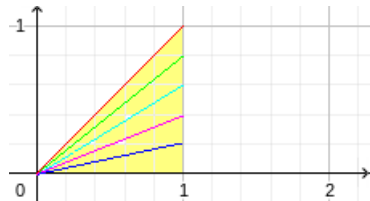


ANALIZA MATEMATYCZNA 3, NO...TKI Z WYKŁADU 9B $\iint_P f$

PRZYKŁAD. Niech $f(x, y) = x^2$, $P = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x, x \in [0, 1]\}$ i $n \in \mathbb{N}$.

a) Linie postaci $y = \frac{k}{n} \cdot x$, $k \in \mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω'_n zbioru P , dla którego:

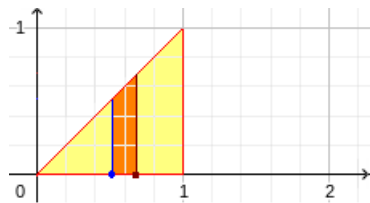


- $\sup f[P_i] = \dots\dots$ dla każdego $P_i \in \omega'_n$
 - $\inf f[P_i] = \dots\dots$ dla każdego $P_i \in \omega'_n$
- skąd

$$s_{\omega'_n} = \dots\dots\dots S_{\omega'_n} = \dots\dots\dots$$

i NIC z tego nie mamy; różnią się bardzo!

b) Linie postaci $x = \sqrt{\frac{k}{n}}$, $k \in \mathbb{Z}$ wyznaczają podział ω''_n zbioru P , dla którego:



- pole $P_k = \dots\dots$ dla każdego $P_k \in \omega''_n$
- stąd

$$s_{\omega''_n} = \dots\dots\dots S_{\omega''_n} = \dots\dots\dots$$

skąd

$$\iint_P x^2 d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\omega''_n} = \dots\dots$$

* * *

TWIERDZENIE. Jeśli $f(x, y)$ jest ciągła na P , to jest całkowna na P ,

tzn. $\iint_P f = \overline{\iint_P f}$, całka dolna i górna są równe.

Ponadto, jeśli ω_n jest ciągiem coraz drobniejszych podziałów P , tzn. takim, że największe średnice ich elementów są zbieżne do 0, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\omega_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\omega_n} = \iint_P f.$$

Powyższe twierdzenie pozwala łatwo dowodzić twierdzeń takich, jak poniższe:

Tw.

a) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\iint_P f(x, y) + g(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

b) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\iint_P \pi \cdot f(x, y) - e \cdot g(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

c) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\iint_{A \cup B} f(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

d) Jeśli $\forall_{x, y} f(x, y) = -f(-x, y)$, to $\iint_{[-2, 2] \times [-3, 3]} f(x, y) d\omega = \dots\dots\dots$

e) Jeśli $\dots\dots\dots$, to $\dots\dots\dots$

DEFINICJA. Niech $f(x, y)$ będzie funkcją ograniczoną na zbiorze ograniczonym P . Dla podziału $\omega = \{P_1, \dots, P_m\}$ zbioru P na zbiory o rozłącznych wnętrzach i przy wyborze z nich punktów $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ przyjmujemy oznaczenia:

$$\sigma_\omega = \sum_{i=1}^m f(x_i, y_i) \cdot |P_i|, \quad s_\omega = \sum_{i=1}^m \inf_{P_i} f \cdot |P_i|, \quad S_\omega = \sum_{i=1}^m \sup_{P_i} f \cdot |P_i|,$$

gdzie $|P_i|$ = pole zbioru P_i . Rozważając **wszystkie** podziały określamy:

$$\underline{\iint_P f} := \sup_\omega s_\omega - \text{całka dolna}, \quad \overline{\iint_P f} := \inf_\omega S_\omega - \text{całka górna}.$$

Gdy są równe, to tę liczbę nazywamy całką f na zbiorze P i piszemy $\iint_P f$.

SPOSTRZEŻENIA.

- $S_\omega - s_\omega = \left(\sum_i \sup_{P_i} f \cdot |P_i| \right) - \left(\sum_i \inf_{P_i} f \cdot |P_i| \right) = \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f) \cdot |P_i|.$

- Gdy wszystkie elementy podziału mają to samo pole $|P_i| = p$,
to $S_\omega - s_\omega = p \cdot \sum_i (\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f).$

- Gdy na wszystkich elementach podziału jednakowa jest różnica $\sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f = c$,
to $S_\omega - s_\omega = c \cdot \sum_i |P_i| = c \cdot |P|.$

d) Gdy B jest obszarem wyznaczonym przez krzywe $x + 1 = y^2$, $2x + y^2 = 10$, to

$$\iint_B x \, d\omega = \quad (\text{wygodniej wyznaczać } x = x(y) \text{ i punkty przecięcia (zrób rys.)})$$

$$= \int_{-2}^{\dots\dots} \left(\int_{\dots\dots}^{\dots\dots} x \, dx \right) dy = \dots\dots\dots$$

e) Dla czworobocianu C o wierzchołkach $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 6)$ mamy:

$$\iiint_C x^2 \, d\omega = \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} \left(\int_0^{6-6x-2y} x^2 \, dz \right) dy \right) dx = \quad \left(\left(\begin{array}{l} \text{w wewnętrznym nawiasie} \\ x^2 \text{ jest jak stała} \end{array} \right) \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} (x^2 \cdot (6 - 6x - 2y)) \, dy \right) dx = \quad \left(\left(\begin{array}{l} \text{zatem mnożymy } x^2 \\ \text{przez długość przedziału} \end{array} \right) \right)$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{3-3x} 6x^2 - 6x^3 - 2x^2y \, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (6x^2(3 - 3x) - 6x^3(3 - 3x) - x^2((3 - 3x)^2 - 0^2)) \, dx = \quad \begin{array}{l} \text{zmudnie!} \\ \text{ale łatwo!} \end{array}$$

$$= 9 \int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2 \, dx =$$

$$= \frac{3}{10} \quad (\text{uff!})$$

Tą samą całkę potrójną można inaczej zamienić na całkę iterowaną, np.:

$$\iiint_C x^2 \, d\omega = \int_0^6 \left(\int_0^{1-z/6} \left(\int_0^{3-3x-z/2} x^2 \, dy \right) dx \right) dz = \dots\dots\dots \quad \begin{array}{l} \text{nie ma co liczyć} \\ \text{wyjdzie tyle samo} \end{array}$$

Można jeszcze inaczej:

$$\iiint_C x^2 \, d\omega = \int_{\dots}^3 \left(\int_{\dots}^{\dots\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots\dots} x^2 \, dz \right) dx \right) dy = \dots\dots\dots$$

f) Poniższa całka iterowana

$$\int_1^2 \left(\int_x^{2x} \left(\int_0^{x^2+y^2} x^2 \, dz \right) dy \right) dx \quad \text{jest równa całce potrójnej } \iiint_V x^2 \, d\omega,$$

gdzie $V = \{(x, y, z) : x \in [1, 2] \wedge x \leq y \leq \dots \wedge 0 \leq z \leq \dots\dots \}$;

mówiąc 'prozą': V jest bryłą pod paraboloidą $z = x^2 + \dots\dots$ leżącą nad trapezem o wierzchołkach $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(2, \dots, 0)$, $(1, \dots, \dots)$.