

1. Zapisz całkę  $\iint_S f(x, y) d\omega$  jako całkę iterowaną (lub sumę całek iterowanych) w układzie biegunowym i w układzie kartezjańskim, gdy:

a)  $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \sqrt{2} \wedge x \leq 0\}$     b)  $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4x \wedge |y| \leq x\}$

c)  $S = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 4y\}$     d)  $S = \{(x, y) : |y| \leq x \leq 4\}$     e)  $S = [0, 1]^2$

2. Wyraż całki we współrzędnych biegunowych i oblicz je.

a)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$     b)  $\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{y^2}{x^2+y^2} dy dx$     c)  $\int_1^2 \int_0^x \pi dy dx$

d)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}} xy dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy dy dx$     e)  $\int_{-3}^{3/\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{x}{x^2+y^2} dy dx$

g)  $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} |x+y| dy dx$     h)  $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} x^2 + y^2 dy dx$     i)  $\iint_{x^2+y^2 < 2y} x^2 + y^2 d\omega$

3. Oblicz całki    a)  $\iiint_N x^2 + y^2 d\omega$ ,  $N = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, x+y+z \leq 1\}$

b)  $\iint_M x^3 d\omega$ ,  $M = \{(x, y); 4x^2 + y^2 \leq 4\}$     c)  $\iint_R |x^2 - y| d\omega$ ,  $R = [0, 1] \times [0, 1]$

d)  $\iiint_O 1 d\omega$ ,  $O = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$     e)  $\iiint_{[-a, a]^3} |y| + |z| d\omega$

4. Obliczyć objętość obszaru (a-f: ograniczonego powierzchniami):

a)  $x + y + z = 4$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$     b)  $z = 4$ ,  $x^2 + y^2 = z$

c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$     d)  $2z = (x-1)^2 + y^2$ ,  $x + z = 5$

e)  $z = 4x + 2y$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$     f)  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z = 0$

g)  $\{(x, y, z) : z^2 + 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$     h)  $\{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \leq 9\}$

5. Znajdź (o ile istnieją) wszystkie wartości parametru  $p$  takie, że objętość bryły  $B$  jest równa 1, gdy  $B$  jest ograniczona powierzchniami:

a)  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $z = p$ ,  $z = 0$     a')  $x^2 + y^2 = pz^2$ ,  $z = 1$ ,  $z = 0$

b)  $x^2 + y^2 = z$ ,  $x^2 + y^2 = p$ ,  $z = 0$     b')  $x^2 + y^2 = pz$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$

c)  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z = p$     c')  $x^2 + y^2 = 3(z+p)$ ,  $x^2 + y^2 = 4(p-z)$

d)  $p = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $z = |x|$     d')  $1 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $z = p|x|$