ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 11. 21.12.2022, 4,5.01.2023

1. Wyraź całki we współrzędnych cylindrycznych i oblicz je.

a) $\iiint\limits_A x^2+y^2\,dV$ gdzie A jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=4$

b) $\iiint\limits_B z\,dV$ dla $B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 1,\ x,y,z\geq 0\}$ **c)** $\int\limits_0^3\int\limits_0^x\int\limits_0^2 x\,dzdydx$

d) $\iiint\limits_D y^2\,dV$ gdzie D jest wyznaczone przez pow. $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$

2. Wyznacz pole powierzchni **a)** wykresu f-cji $f:P\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=a\sqrt{x^2+y^2}$

b) bryły $V=\{(x,y,z): x^2+y^2+5\leq x^2+y^2+z\leq 9\}$ **b')** bryły $x^2+y^2+|z|\leq 9$

c) części pow. $z=x^2$ leżącej nad trójkątem o wierzch. (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0).

d) części sfery $16=x^2+y^2+z^2$ leżącej w walcu **d')** $x^2+y^2=4$ **d")** $x^2+y^2=4x$

e) części wspólnej dwóch kul o promieniu R, których środki leżą w odległości $2a$

3. Wyraź całki jako całki iterowane w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

a) $\int\limits_1^2\int\limits_4^9 x\sqrt{y}\,dydx$ $\begin{cases} x=u \\ y=v^2\end{cases}$ **b)** $\iint\limits_{\substack{1\leq x+y\leq 2\\ 3\leq y-x\leq 4}} xy\,d\omega$ $\begin{cases} x=u-v \\ y=u+v\end{cases}$ **c)** $\int\limits_1^2\int\limits_0^{x^2} y\,dydx$ $\begin{cases} x=\sqrt{u} \\ y=v\end{cases}$

4. Znajdź nowe współrzędne, w których obszar całkowania jest kołem o środku (0,0), lub jego częścią i wyraź całki w nowych podanych współrzędnych (nie obliczaj ich)

a) $\iint\limits_{(x-3)^2+(y-4)^2\leq 9} xy\,d\omega$ **b)** $\iint\limits_{\substack{(4x-12)^2+9y^2\leq 4\\ y\leq 0,\ x\geq 3}} xy\,d\omega$ **c)** $\int\limits_0^2\int\limits_{-3\sqrt{4-x^2}}^{3\sqrt{4-x^2}} xy\,dydx$

4'. Oblicz: **a)** $\iint\limits_{(x+5)^2+4(2y+1)^2\leq 9} xy\,d\omega$ **b)** $\iint\limits_{(x+y)^2+(2x+3y)^2\leq 4} xy\,d\omega$

5. Wyraź całki w nowych podanych współrzędnych i oblicz je.

a) $\int\limits_2^3\int\limits_{\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} xy\,dydx$ $\begin{cases} s=x \\ t=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$ **b)** $\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}(x+y)^{10}dydx$ $\begin{cases} x=s\cos^2 t \\ y=s\sin^2 t\end{cases}$

* * *

6. Uzasadnij, że ciągi $a_k=\iint\limits_{[0,9k]\times[0,k\pi]}\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,d\omega$, $b_n=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq n^2\\ x,y\geq 0}}\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,d\omega$:

a) są rosnące **b)** $\forall_n \exists_k\ a_k>b_n$ **b')** $\forall_k \exists_n\ b_n>a_k$ **c)** $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=\frac{\pi^2}{8}$

7. Dla jakich wartości parametru $p>0$ całka $\iint\limits_{||(x,y)||\leq 1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}d\omega$ jest zbieżna?