

0. Oblicz 'na palcach': $\int_{(1,1)(9,2)} (1,4) \circ d\vec{r}$, $\int_{\text{brzeg}[0,1]^2} (1,4) \circ d\vec{r}$, $\int_{x^2+y^2=4} (x,y) \circ d\vec{r}$

1. Oblicz całki krzywoliniowe skierowane

$\int_A \vec{F} \circ d\vec{r}$, dla $\vec{F}(x,y) = (2x+3y, 4x+5y)$, gdzie A – odcinek od $(0,1)$ do $(3,3)$

$\int_B (x^2+y)dx + (x-y)dy$, B – część paraboli $y^2 = x$ od $(1,-1)$ do $(1,1)$

$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r}$, dla: $\vec{F}(x,y) = (y,x)$ lub $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$, lub $\vec{F}(x,y) = (y^2, x^2)$,

gdym Γ to: **c**) odcinek od $(0,1)$ do $(2,2)$ **d**) okrąg $x^2+y^2=4$ **d')** o śr. $(0,2)$

2. Wznaczn pracę potrzebną do przeniesienia 1kg pokonując pole sił $\vec{F} = [x^2-y, xy, z^z]$ wzdłuż linii $y^2 = 8x$, $z = 1$ od punktu $A(0,0,1)$ do punktu $B(2,4,1)$.

3. Oblicz całkę, gdy Γ jest krzywą gładką skierowaną od A do B :

a) $\int_{\Gamma} (\pi x + y) dx + (x - \sqrt{2}y) dy$, $A = (0,1)$, $B = (2,3)$

b) $\int_{\Gamma} (e^x + y) dx + (x + 2y) dy$, $A = (0,1)$, $B = (u,v)$

c) $\int_{\Gamma} y dx + (x + z) dy + y dz$, $A = (-1,1,0)$, $B = (3,4,5)$

d) $\int_{\Gamma} (\cos x + 2yz) dx + (\sin y + 2xz) dy + (z + 2xy) dz$, $A = (0,0,0)$, $B = (\pi, \pi, \pi^{-1})$

4. Oblicz całkę $\int_K \vec{F} \circ d\vec{r}$, gdzie K jest brzegiem Ω skierowanym przeciwwzgarowo i:

a) $\vec{F} = (P, Q)$ gdzie $P = xe^{x^2+y^2}$, $Q = ye^{x^2+y^2}$ oraz $\Omega = \{(x,y) : 4x^2+9y^2 \leq 1\}$

b) $\vec{F}(x,y) = (2xy, 2^{\sin y} + x^2)$, $\Omega = \{(x,y) : x^2 \leq y \leq 1\}$

c) $\vec{F}(x,y) = (y^2 - y, (x+y)^2)$, $\Omega = [-1,1]^2$ **c')** $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$

d) $\vec{F} = (0, xy)$, $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, x,y \geq 0\}$ **d')** $\Omega = \{(x,y) : x^4+y^4 \leq 1\}$

e) $\vec{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, $\Omega = [-1,1] \times [1,4]$ **e')** $\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

f) $\vec{F} = \frac{1}{\|(x,y)\|} (-y, x)$, $\Omega = \{(x,y) : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ **f')** $\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 9\}$

5. Zastosuj wzór Greena do obliczenia całek (krzywe są skierowane przeciwwzgarowo)

a) $\oint_{x^2+5y^2=17} x^{2021} e^{2022y} dx + x^{2022} e^{2022y} dy$ **b)** $\oint_{x^{2020}+y^{2022}=1} e^{(x+y)^7} dx + e^{(x+y)^7} dy$

6. Niech $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, $M = \{(x,y) : y = |x| - 1, x \in [-1,1]\}$, $L = [-1,1] \times \{0\}$, oznaczając krzywe skierowane od $(1,0)$ do $(-1,0)$.

Oblicz $\int_K P dx + Q dy$ i $\int_M P dx + Q dy$ wiedząc, że

a) $Q'_x - P'_y = 6$ i $\int_L P dx + Q dy = 2$ **b)** $Q'_x - P'_y = x^{17}$ i $\int_L P dx + Q dy = \sqrt{2}$

ŚCIAGA.

OZNACZENIA. Poniżej w każdej linii jest pojęcie i jego różne (typowe) oznaczenia:

- pole wektorowe: \vec{F} , $\vec{F}(x,y)$, (P,Q) , $(P(x,y), Q(x,y))$
- parametryzacja krzywej Γ : \vec{r} , $r(t)$, $(x(t), y(t))$, (x_t, y_t) , (x,y) ,
- całka skierowana: $\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r}$, $\int_{\Gamma} (P,Q) \circ d\vec{r}$, $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$, $\int_{\Gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy$.

Tw. Gdy $\vec{r} : [a,b] \rightarrow \Gamma$, $\vec{r} = (x(t), y(t))$ jest gładką parametryzacją łuku Γ , to

$$\int_{\Gamma} P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt} dt .$$

Tw. Gdy $\vec{F} = \text{grad } f$ i $\vec{r} : [a,b] \rightarrow \Gamma$ jest gładką parametryzacją łuku Γ , to

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)) .$$

TWIERDZENIE GREENA. Niech K będzie krzywą płaską skierowaną dodatnio (przeciwwzgarowo) ograniczającą obszar Ω 'bez dziur' i niech $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ będzie polem wektorowym określonym na Ω , gdzie P, Q są klasy C^1 . Wtedy

$$\int_K P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\omega .$$