ANALIZA MATEMATYCZNA 3. LISTA 14. (całki w geometrii)

1. Niech V_1, V_2 oznaczają stożki ($H = R = 1$), które 'stoją' na płaszczyźnie $z = 0$ i których środki podstaw są w odległości 1. (Rysunki — patrz link na stronie wykładu)

a) Oblicz pole powierzchni przekroju $V_1 \cap V_2$ ODP. $2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot (1 + \sqrt{2})$

b) Oblicz objętość $V_1 \cap V_2$ WSK. $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{\cos x} + C$

2. Oblicz objętość bryły V, gdy: WSK. $|V|_{obj} = \iiint_V 1\,d\omega = \int_0^3 \int_?^? \int_?^? 1\,dy\,dx\,\underline{\underline{dz}}$

a^k) $V = V_k = \{(x,y,z) : x, y \in \left[0, (\frac{z}{3})^k\right], z \in [0,3]\}$, dla $k=4$ WSK. dla $k \in \{0,1,2\}$

b^k) $V = V_k = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le (\frac{z}{3})^k, z \in [0,3]\}$ dla $k \in \{0,2,1\}$

c) $V = \{(x,y,z) : (x - \cos(\frac{z}{3}2\pi))^2 + (y - \sin(\frac{z}{3}2\pi))^2 \le (\frac{z}{3})^2, z \in [0,3]\}$

d*) $V = \{(x,y,z) : (x - f(\frac{z}{3})\cos(\frac{z}{3}2\pi))^2 + (y - f(\frac{z}{3})\sin(\frac{z}{3}2\pi))^2 \le (f(\frac{z}{3}))^2, z \in [0,3]\}$

3. Niech $V = \{(x,y,z) : (x - \frac{z}{3})^2 + y^2 \le (\frac{z}{3})^2, z \in [0,3]\}$ (pochyły stożek).

a) Uzasadnij, że płaszczyzna $z = 3x$ dzieli V na bryły o równych objętościach.

b) Czy tę własność ma każda płaszczyzna zawierająca punkty $(0,0,0)$, $(1,0,3)$?

* * *

Poniżej 'wyznacz' oznacza 'zapisz jako całkę iterowaną lub sumę całek iterowanych w ukł. kartezjańskim i/lub cylindrycznym (biegunowym)'. Niektóre można obliczyć. KTÓRE?

4. Wyznacz objętość i pole powierzchni bryły V, gdy:

a) V jest częścią wspólną dwóch walców o promieniu R, których osie są prostopadłe

b) V jest torusem, tzn. jest bryłą otrzymaną z obrotu wokół osi OZ koła
$K = \{(x,0,z) : (x - R_d)^2 + z^2 \le R_m^2\}$, gdzie $0 < R_m < R_d$.

5^k. Płaszczyzna $z = x$ rozcina U_k na dwie części; mniejszą oznaczmy V_k dla

$U_1 = \{(x,y,z) : 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$, $U_2 = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$,

$U_3 = \{(x,y,z) : 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$, $U_4 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$.

Wyznacz:

a) objętość V_k **b)** pole pow. V_k **c)** długość 'krawędzi' V_k

d) masę V_k, gdy gęstość jest sześcianem odl. od osi OX **d')** od pł. $x = \frac{1}{2}$

e) energię kinetyczną V_k kręcącego się wokól osi $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ w stałym tempie siedmiu obrotów na sekundę, gdy gęstość jest sześcianem odległości od osi OX

f) środek ciężkości V_k, gdy gęstość jest kwadratem odległości od $(\frac{1}{2}, 0, 0)$

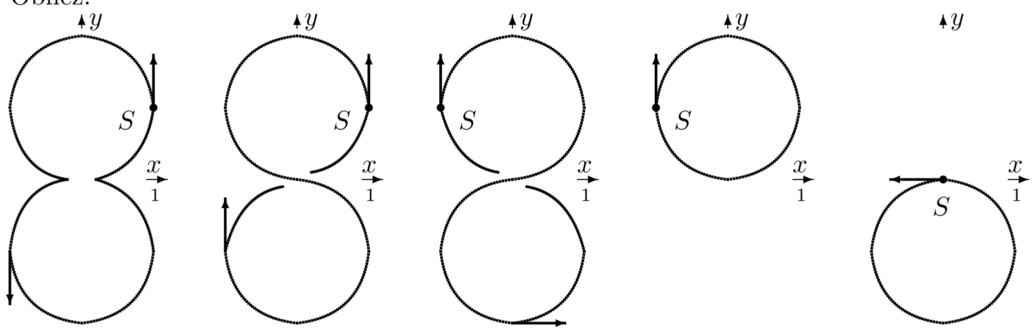
6^k. Powtórz zad.5^k, $k = 1,2,3$, gdy zamiast $z = x$ weźmiemy powierzchnię $x^2+y^2 = x$.

7^k. Powtórz zad.5^k, gdy zamiast $z = x$ weźmiemy płaszczyznę $x = \frac{1}{3}$.

* * *

Poniższe zadania (treningowe) można zrobić 'sprytnie'; niemal nic nie rachując. Spróbuj

8. Krzywe $A, B, C, D, E = \{(x,y) : x^2 + (1-|y|)^2 = 1\}$ są skierowane od S do S, jak pokazano poniżej. Pole $\vec{F} = (P,Q)$ jest takie, że $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y + 6 + x^9$.
Oblicz:



A B C D E

$\int_A \vec{F} \circ d\vec{r} = \ldots$ $\int_B \vec{F} \circ d\vec{r} = \ldots$ $\int_C \vec{F} \circ d\vec{r} = \ldots$ $\int_D \vec{F} \circ d\vec{r} = \ldots$ $\int_E \vec{F} \circ d\vec{r} = \ldots$

9. Oblicz wartości całek krzywoliniowych

a) $\int_A \ln\left((x-2)^2 + y^2\right) ds$ gdzie B jest okręgiem o środku (2,0) i promieniu 2

b) $\int_B y + \sqrt{2}\,ds$ gdzie B jest okręgiem o środku (2,0) i promieniu 2

c) $\int_C x + y(x^4+1)\,ds$ gdzie C jest odcinkiem o końcach (0,0) i (0,2)

d) $\int_D (\pi x - 5y, 5x + \pi y + \cos(xz), z + \sin^4 y^3) \circ d\vec{r}$

. gdzie $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 9, x \ge 0,\ z = 0\}$