

0. Niech $f(x,y) = \frac{x}{y}$. Podaj przykład ciągu $a_n = (x_n, y_n)$ zbieżnego do $(0,0)$ takiego, że

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = -\pi$ 0'. Powtórz dla $f(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$.

* * *

1. Zbadaj istnienie następujących granic, oblicz wartość, jeśli granica istnieje

a) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$ c) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ d) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

e) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} (x-3)(\ln y - \ln 4)$ f) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{\ln y - \ln 4}{x-3}$ g) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 4}} \frac{e^{(x-3)^2 + (y-4)^2} - 1}{(x-3)^2 + (y-4)^2}$

h) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{y-x^2}$ i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} e^{y/x^2}$ j) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0}} e^{y^2/x}$ k) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^4 + y^4}$

l) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ m) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin x}{y}$ n) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy \sin(x)}{x^2 + y^2}$ o) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$

2. Podaj zbiór punktów ciągłości funkcji f

a) $f(x,y) = \operatorname{sgn}(x+y)$ b) $f(x,y) = y \cdot \operatorname{sgn} x$ c) $f(x,y) = [x] + [y-0,1]$

d) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{dla } x \geq y \\ x - y & \text{dla } x < y \end{cases}$ e) $f(x,y) = \min\{|x|, |y|\}$

f) $f(x,y) = \begin{cases} |x| + |y| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$ g) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - |y| & \text{dla } x \geq 0 \\ 5 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$

h) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy^2} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2 y} - 1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y^2 + y - 7 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

3. W zależności od wartości parametru p , podaj liczbę punktów ciągłości funkcji f leżących w podanym zbiorze W .

a) $f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ p & \text{dla } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$, $W =$ okrąg o środku $(0,0)$ i promieniu 1

b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } |x| + |y| < 1 \\ p & \text{dla } |x| + |y| \geq 1 \end{cases}$, $W = \{(x,y) : |x| + |y| = 1\}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } (x,y) \in [-1,1]^2 \\ p & \text{dla } (x,y) \notin [-1,1]^2 \end{cases}$, $W = [-1,1]^2 \setminus (-1,1)^2$