Analiza matematyczna 3. Lista 4. ćw. 26,27.10.2017

Kartkówka k1: 28.10.2022, 10^{15}, s.HS. **Zakres: lista 3 i zadania 1,2,3 z listy 4.**

1. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu; wskaż ich dziedziny.

a) $f(x,y) = x^7y^9 + xe^{xy}$ **b)** $f(x,y,z) = \arctan(x^2y^3z^4)$ **c)** $z = |x| + [y]$

d) $f(x,y) = \frac{x^4y^6}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$ **e)** $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0) = 0$

f) $f(x,y) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$. **g)** $f(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$, $f(0,y) = |y|$

2. Dla zadanej funkcji f podaj zbiór tych wszystkich punktów dziedziny, w których:
a) nie istnieje f'_x **b)** nie istnieje f'_y **c)** f nie ma granicy **d)** f nie jest ciągła,

gdy **A)** $f(x,y)=\begin{cases} |x| \text{ dla } (x,y)\in[0,1)\times[0,1] \\ y \text{ dla } (x,y)\notin[0,1)\times[0,1] \end{cases}$ **B)** $f(x,y)=\begin{cases} 3x \text{ dla } x^2\le y \\ y \text{ dla } x^2>y \end{cases}$

3. Niech $f(x,y) = \begin{cases} ax+by+c & \text{dla } x^2+y^2<1 \\ x^2+y^2 & \text{dla } x^2+y^2 \ge 1 \end{cases}$. Dla jakich wartości a,b,c

a) f ma pochodną cząstkową f'_x w punkcie $p_0=(1,0)$ **b)** istnieje $f'_y(1,0)$

c) $f'_x(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ **d)** istnieje $f'_x(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ **e)** $f'_x(0,0) + f'_y(0,0) = 1$

* * *

4. W podanym punkcie znajdź równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni

a) $z = (2+x-y)^2$, $(3,-1,36)$ **b)** $z = 4x^2+y^2$, $(2,1,17)$

c) $zy + z = x + 2$, $(2,3,1)$ **d)** $xyz = 1$, $(0.5,-2,-1)$

e) $\sin(xy) = 2 - z^2$, $(\pi, 0.5, -1)$ **f*)** $(x+y-1)(x+y+1) = 2xy$, $(0.5\sqrt{3}, 0.5, 2)$

5. Udowodnij, że płaszczyzny styczne do powierzchni $x^2+y^2+z^2 = 16$ i $z^2 = x^2+y^2$ w punkcie $(2,2,2\sqrt{2})$ są prostopadłe.

6. Znajdź długość odcinka prostej $x = 2, y = 3$ zawartego między powierzchnią $z = x^2 + y^2$ i płaszczyzną styczną do niej w punkcie $(1,1,2)$.

* * *

7. Oblicz gradient funkcji **a)** $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$ **z)** $f(x,y,z) = (x^2+y^4)^z$

8. Oblicz pochodną funkcji w kierunku podanego wektora. (Doprecyzuj (jakoś) zadania.)

a) $f(x,y) = x^8y^4 + e^{x^2y}$ w punkcie $(0,5)$ wzdłuż wektora $[-1,2]$
b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ w punkcie $(1,1)$ w kierunku wektora $[5,12]$
c) $f(x,y) = 2xy + x^2y^2$, $[1,-1]$ **d)** $f(x,y) = x(x+y)^{20}$, $[5,12]$
e) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ w punkcie $(1,2)$ w kierunku prostej $4x + 3y = 12$