Analiza matematyczna 3. WypełNiańka do Listy 6.

Lista 6, zad. 2 c) Niech $A = 1.02^{\,3.01}$.
Dla $f(x,y) =$ ...... wartość $A = f(1.02, 3.01)$, co można przybliżyć z równania płaszczyzny stycznej do f w punkcie $p_0 = (..., 3)$, to znaczy:

Obliczamy $f'_x(p_0) =$ .... $=$ ... , $f'_y(p_0) =$ .... $=$ ... i równanie płaszczyzny stycznej: $z = ... + ... \cdot (x - ...) + ... \cdot (... - ...)$.
Dalej traktujemy prawą stronę jako wzór funkcji $z = z(x,y)$, skąd mamy:

$$A \approx z(...,...) = ... + ... \cdot (... - ...) + ... \cdot (... - ...) = \ ... \ .$$

Błąd tego przybliżenia jest równy: $|A - \ ... \ | = |f(1.02, 3.01) - \ ...... \ | = |\text{błąd}|$.

Z tw. Taylora ów błąd jest równy (dokładnie!) reszcie R_2, czyli

$$\text{błąd } = R_2 = \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(\hat{x},\hat{y}) \cdot \ ...\ ^2 + 2 f''_{yx}(\hat{x},\hat{y}) \cdot \ ... \ \cdot \ ... \ + f''_{yy}(\hat{x},\hat{y}) \cdot \ ...\ ^2\right) .$$

Obliczamy $f''_{xx} =$ .... , $f''_{yy} =$ .... , $f''_{xy} =$ .... ; niestety nie wiemy w jakim punkcie je liczyć; trzeba szacować uwzględniając, że: $\hat{x} \in [1, ...]$ i $\hat{y} \in [..., ...]$.

$$|\text{błąd}| = |R_2| = \frac{1}{2} \cdot \left|f''_{xx}(\hat{x},\hat{y}) \cdot \ ...\ ^2 + 2 f''_{yx}(\hat{x},\hat{y}) \cdot \ ... \ \cdot \ ... \ + f''_{yy}(\hat{x},\hat{y}) \cdot \ ...\ ^2\right| \le$$

$$\le \tfrac{1}{2}\left(........... \ \cdot \ ...\ ^2 + 2 \ .... \ \cdot \ ... \ \cdot \ ... \ + \ .... \ \cdot \ ...\ ^2\right) \le \overbrace{\text{nier. tr.}}$$

$\le$ ...

$\le$ ...

$\le$ ...

$\le$ ...

Zatem owe przybliżenie pł. styczną daje $A \approx$ ... z błędem mniejszym od ... .
(Maple podaje $A = 1.02^{\,3.01} \approx 1.061418167873770811706227659044407043797715 39$.)

* * *

Lista 6, zad. 3 f) Funkcja $f(x,y) = x^3 - x + y^2$ jest klasy $\mathcal{C}^2$, więc ekstrema lokalne MOŻE mieć TYLKO w punktach spełniających układ równań:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} ...... =0 \\ ...... =0 \end{cases} \iff \left(\begin{cases} x= ...... \\ y= ...... \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x= ...... \\ y= ...... \end{cases} \right),$$

czyli w $p_1 = (\frac{...}{...}, \ ... \ )$ lub w $p_2 = (\frac{...}{...}, \ ... \ )$.

Obliczmy hesjan $H = \det\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix} =$ ....

Dla $p_1 = (\frac{...}{...}, \ ... \ )$ mamy: $H =$ ...... > 0 i $f''_{xx}(p_1) =$ 0,
stąd f .... w p_1.

W $p_2 = (\frac{...}{...}, \ ... \ )$ mamy $H =$ ...... < 0, czyli f .... w p_2.