ANALIZA MATEMATYCZNA 3. Rozwiązania niektórych zadań z Listy 7.

Uwaga. Możliwe, że w niektórych rachunkach zaplątały się jakieś o(błędy).

**1.** Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach.

**a)** $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$

*Rozwiązanie.* Ponieważ $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3 = 2x^2 + (y+1)^2 - 4$, więc $\inf_{\mathbb{R}^2} f = 2\cdot 0^2 + 0^2 - 4 = f(0,-1) = -4$ oraz $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, bo $f(n,0) = 2n^2 - 3 \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

**a")** $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3$ gdy $x^2 + y^2 \le 4$

*Rozwiązanie.*

$0^o$. Warunek opisuje koło $W = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 4 \le 0\}$, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa $f$ osiąga kresy na $W$.

$1^o$. Punkty krytyczne w wnętrzu $W$:

$\begin{cases} 4x = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ i ten punkt $p_1 = (0,-1)$ leży w wnętrzu koła $W$.

$2^o$. Punkty krytyczne na brzegu $W$ (stosujemy metodę mnożników Lagrange'a):

$$\begin{cases} 4x = \lambda\cdot 2x \\ 2y+2 = \lambda\cdot 2y \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{cases} x = 0 \\ 0^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = 2 \\ 2y+2 = 2\cdot 2y \\ \ldots \end{cases} \right) \Rightarrow \left( \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y = 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \right)$$

Stąd na brzegu $W$ są 4 p. kryt.: $p_2 = (0,2)$, $p_3 = (0,-2)$, $p_4 = (\sqrt{3},1)$, $p_5 = (-\sqrt{3},1)$.

$3^o$ *Podsumowanie.* Z $0^o, 1^o, 2^o$, wśród wartości $f$ w 5 p. kryt. znajdziemy w. najw. i najmniejszą: $\underbrace{f(0,-1) = -4}_{=\inf_W f}$, $f(0,2) = 5$, $f(0,-2) = -3$, $f(\sqrt{3},1) = \underbrace{6}_{=\sup_W f} = f(-\sqrt{3},1)$.

**f)** $f(x,y) = xy$ gdy $x^2 + y^2 = 32$

*Rozwiązanie.* Warunek opisuje okrąg $W = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 32 = 0\}$, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa $f$ osiąga kresy na $W$. Wnętrze $W$ jest puste. Punkty krytyczne znajdujemy stosując metodę mnożników Lagrange'a:

$$\begin{cases} y = \lambda\cdot 2x \\ x = \lambda\cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0^2 + 0^2 = 32 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = \frac{y}{2x} \\ x = \frac{y}{2x}\cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \right) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ 2x^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 4 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x = -4 \\ y = \pm 4 \end{cases} \right)$$

Stąd mamy cztery p.kryt.: (4,4), (4,–4), (–4,4), (–4,–4).

*Odp.:* $f(4,-4) = f(-4,4) = -16 = \inf_W f$, $f(4,4) = f(-4,-4) = 16 = \sup_W f$.

**h)** $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2 + 3$ gdy $x^2 + y^2 = \pi$

*Rozwiązanie.* Dla punktów okręgu mamy: $f(x,y) = x^2 + (y+1)^2 + 3 = 2y + 4 + \pi$ i $-\sqrt{\pi} \le y \le \sqrt{\pi}$, więc $\inf_{x^2+y^2=\pi} f = -2\sqrt{\pi} + 4 + \pi = f(0,-\sqrt{\pi})$, $\sup_{x^2+y^2=\pi} f = 2\sqrt{\pi} + 4 + \pi = f(0,\sqrt{\pi})$.

**2.** Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji przy podanych warunkach.

**b)** $f(x,y,z) = y^3 + xz^2 \quad \text{gdy} \quad x^2+y^2+z^2 = 1$

*Rozwiązanie.* Warunek opisuje sferę $W$, czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa $f$ osiąga kresy na $W$ w pewnych punktach spełniających układ:

$$\begin{cases} z^2 = \lambda 2x \\ 3y^2 = \lambda 2y \\ 2xz = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \underset{\text{II i III równ.}}{\text{analizując}} \left( \begin{cases} y=0 \\ z=0 \text{ lub } x=\lambda \\ \ldots \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ z=0 \text{ lub } x=\frac{3}{2}y \\ \ldots \end{cases} \right)$$

$$\left( \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y=0 \\ z^2 = 2x^2 \\ 3x^2=1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ z=0 \\ 0^2 = 3yx \\ \ldots \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}y \\ x=\frac{3}{2}y \\ z^2 = \frac{3}{2}y\cdot 2(\frac{3}{2}y) \\ \frac{9}{4}y^2+y^2+\frac{9}{2}y^2=1 \end{cases} \right) \text{skąd}$$

$$\left( \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y=0 \\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y=0 \\ z=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z=0 \\ x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} z=0 \\ y=0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=\frac{3}{\sqrt{31}} \\ z=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y=\frac{2}{\sqrt{31}} \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=\frac{-3}{\sqrt{31}} \\ z=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}} \\ y=\frac{-2}{\sqrt{31}} \end{cases} \right)$$

Dalej wystarczy porównać wartości $f$ w tych <u>12</u> punktach. Mamy:

$$f(\pm 1,0,0)=0, \quad \left|f(-\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\pm\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})\right| = f(\tfrac{1}{\sqrt{3}},0,\pm\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}) = \tfrac{2}{3\sqrt{3}} < 1, \quad f(0,\pm 1,0)=\pm 1,$$

$$\left|f(\tfrac{-3}{\sqrt{31}},\tfrac{-2}{\sqrt{31}},\pm\tfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}})\right| = f(\tfrac{3}{\sqrt{31}},\tfrac{2}{\sqrt{31}},\pm\tfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{31}}) = \tfrac{8}{31\sqrt{31}} + \tfrac{3}{\sqrt{31}}\cdot\tfrac{18}{31} = \tfrac{2}{\sqrt{31}} < 1.$$

Zatem $\inf_W f = -1 = f(0,-1,0)$ i $\sup_W f = 1 = f(0,1,0)$.

**c)** $f(x,y,z) = xyz \quad \text{gdy} \quad x^2+y^2+z^2=1, \ x+y+z=0$

*Rozwiązanie.* Warunki opisują okrąg $W$ (przecięcie sfery i płaszczyzny), czyli zbiór ograniczony i domknięty, więc z tw. Weierstrassa $f$ (oczywiście ciągła) osiąga kresy na $W$ w jakichś punktach spełniających układ:

$$\begin{cases} yz = \lambda 2x + \mu \\ xz = \lambda 2y + \mu \\ xy = \lambda 2z + \mu \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(x-y) = \lambda 2(y-x) \\ x(y-z) = \lambda 2(z-y) \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{cases} x=y \\ x+x+z=0 \\ 2x^2+(-2x)^2=1 \end{cases} \text{lub} \begin{cases} \lambda = -\frac{z}{2} \\ x(y-z) = (-\frac{z}{2})2(z-y) \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{cases} x=y \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ z=-2x \end{cases} \text{lub} \begin{cases} y=z \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \text{lub} \begin{cases} x=z \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \right), \text{ czyli mamy 6 p. krytycznych, dla których:}$$

$$f(\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}}) = f(-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = f(\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}},\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = -\tfrac{2}{6\sqrt{6}} = \inf_W f,$$

$$f(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}}) = f(\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = f(-\tfrac{1}{\sqrt{6}},\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}) = \tfrac{2}{6\sqrt{6}} = \sup_W f.$$

**c')** $f(x,y,z) = xyz \quad \text{gdy} \quad xy+yz+xz = -\frac{1}{2}, \ x+y+z=0$

*Rozwiązanie.* Ponieważ $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$, więc zad.c' = zad.c.